classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°10$ du 01 Décembre 2025**

- Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices :
  — Le premier exercice doit contenir :
    — Une question de cours (un énoncé d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème) ou une démonstration qui sera **signalée en gras** dans le programme de colle.
    Deux niveaux de démonstration : niveau ($\star$) pour les groupes 2,3 et 5.
    — Une application très directe du cours :
  — Un deuxième exercice portant sur une notion du programme de colle différente du premier exercice.
- **Comment préparer une colle ?** Il est indispensable de connaître son cours, savoir refaire les exemples traités en cours et les exercices mentionnés dans le programme de colle.

- **Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8.
Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.

- **Après la colle** : Avant le jeudi de la semaine suivant votre colle, vous devez me rendre votre cahier de colle où vous rédigerez au moins un des deux exercices

1 Séries Numériques

Savoirs attendus :

1. Séries alternées : apprendre les méthodes pour reconnaître une séries alternée, savoir appliquer le CSSA et le signe et la majoration du reste, savoir utiliser le développement limité quand $n \to +\infty$ du terme général lorsqu'il est difficile de montrer la décroissance de $(|u_n|)_n$ ou que $u_n = (-1)^n a_n$ et a_n contient du $(-1)^n$.
2. Formule de Stirling : **connaître bien sûr la formule**.

2 Polynômes d'endomorphismes et matriciels

1. Définition, règles de calculs.
2. Polynôme Annulateur : définition, **Soit λ une valeur propre de $u \in \mathscr{L}(E)$ associée à un vecteur propre x, P un polynôme.**
   Alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$ associé au vecteur propre x. Si P est un polynôme annulateur de u, alors
   $$Sp_{\mathbb{K}}(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} / P(\lambda) = 0\}$$
3. Théorème de Cayley Hamilton.
4. Déterminer puissances d'un endo. ou matrice à partir d'un polynôme annulateur.
5. Calcul de l'inverse d'une matrice A ou d'un endo u en la (ou le) présentant comme polynôme matriciel de A ou polynôme de l'endo u

3 Exercices à savoir refaire

Exercice 1.
1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, donner la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
2. Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}\sqrt{n}}$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ est une série alternée et donner sa nature.

Exercice 2. Les Intégrales de Wallis : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$. On a alors
1. $(I_n)_n$ est décroissante.
2. $\forall n, I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
3. $\forall n, I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \dfrac{\pi}{2}$. (On a appris la technique de Wallis)

4. $\forall n, (n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
5. $I_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$

Exercice 3. Pour $x \in \mathbb{R}_*^+$, donner la nature de $\sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n} x^n$.

Exercice 4.
1. Chercher le polynôme annulateur unitaire de plus petit degré des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer les puissances de ces matrices.
3. Montrer qu'elles sont inversibles et calculer leurs inverses. Montrer que ces inverses sont des polynômes matriciels.
4. Déterminer les puissances de leurs inverses.
5. Déterminer $\mathbb{R}[A_1]$ et $\mathbb{R}[A_2]$.

Exercice 5.
1. Montrer que Φ défini par $\Phi(M) = M + tr(M)I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont on donnera le noyau et le rang.
2. Trouver un polynôme de degré 2 annulateur de Φ.
3. Φ est-il bijectif ? Si oui, calculer Φ^{-1}.