classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°11$ du 08 Décembre 2025**

- Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices :
  — Le premier exercice doit contenir :
    — Une question de cours (un énoncé d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème) ou une démonstration qui sera **signalée en gras** dans le programme de colle.
    Deux niveaux de démonstration : niveau ($\star$) pour les groupes 2,3 et 5.
    — Une application très directe du cours :
  — Un deuxième exercice portant sur une notion du programme de colle différente du premier exercice.
- **Comment préparer une colle ?** Il est indispensable de connaître son cours, savoir refaire les exemples traités en cours et les exercices mentionnés dans le programme de colle.

- **Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8.
Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.

- **Après la colle** : Avant le jeudi de la semaine suivant votre colle, vous devez me rendre votre cahier de colle où vous rédigerez au moins un des deux exercices

1 Séries Numériques

Savoirs attendus :

1. Séries alternées : apprendre les méthodes pour reconnaître une série alternée, savoir énoncer et appliquer le CSSA et le signe et la majoration du reste, savoir utiliser le développement limité quand $n \to +\infty$ du terme général lorsqu'il est difficile de montrer la décroissance de $(|u_n|)_n$ ou que $u_n = (-1)^n a_n$ et a_n contient du $(-1)^n$.
2. Formule de Stirling : **connaître bien sûr la formule**.

2 Polynômes d'endomorphismes et matriciels

1. Définition, règles de calculs.
2. Polynôme Annulateur : définition, **Soit λ une valeur propre de $u \in \mathscr{L}(E)$ associée à un vecteur propre x, P un polynôme.**
Alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$ associé au vecteur propre x. Si P est un polynôme annulateur de u, alors
$$Sp_{\mathbb{K}}(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} / P(\lambda) = 0\}$$
3. Théorème de Cayley Hamilton.
4. Déterminer puissances d'un endo. ou matrice à partir d'un polynôme annulateur.
5. Calcul de l'inverse d'une matrice A ou d'un endo u en la (ou le) présentant comme polynôme matriciel de A ou polynôme de l'endo u

3 Réduction

Evidemment, les outils des deux chapitres précédents (éléments propres et polynômes d'endomorphismes et matriciels) doivent être maîtrisés

1. Définition d'une somme d'une famille finie de sous espaces vectoriels, structure d'espace vectoriel.
2. Somme directe : définition et comment montrer qu'une somme est directe, ou qu'elle ne l'est pas, **La somme de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe**.
3. Sous espaces supplémentaires.
4. Cas où E est de dimension finie : Caractérisation des sommes directes et de sous espaces supplémentaires par la dimension .
5. Base d'un espace adaptée à une décomposition en somme directe ou à un sous espace vectoriel.
6. Diagonalisation :
   (a) Définition, énoncé du théorème suivant :
   Il y a équivalence entre les points suivants :

i. u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$

ii. $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_2}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u.

iii. $n = \dim E_{\lambda_1}(u) + \dim E_{\lambda_2}(u) + \cdots + \dim E_{\lambda_p}(u)$.

iv. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \omega_u(\lambda) = \dim E_\lambda(u)$

(b) **Si $Sp(u)$(resp : $\mathbb{S}\imath(A)$ est réduit au singleton $\{\lambda\}$, u est diagonalisable ssi $u = \lambda Id_E$ (resp : $A = \lambda I_n$)**

(c) i. **Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et si toutes ses racines sont simples, alors u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.Mais la réciproque est fausse ! ! ! ! ! ! !.**

ii. **Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable**.

(d) Caractérisation de la diagonalisation par les polynômes annulateurs : connaître les énoncés suivants :

i. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et u un endomorphisme de E.
u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il annule un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.

ii. **Démo $\star$:u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u est un polynôme annulateur de u.**

4 Exercices à savoir refaire

Exercice 1. 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, donner la nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

2. Nature de $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}\sqrt{n}}$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ est une série alternée et donner sa nature.

Exercice 2. 1. (a) Rappeler l'énoncé du théorème permettant de montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^p}{p}$ est convergente, où $p \in \mathbb{N}^*$.

(b) Rappeler l'énoncé du théorème permettant d'écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

(c) De quel signe est R_n ?

(d) En écrivant $\frac{1}{p} = \int_0^1 t^{p-1}\,\mathrm{d}t$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

2. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} R_n$ est une série alternée convergente.

3. Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Exercice 3. *Pour vous entraîner en calcul* Pour chacune des matrices suivantes, dire si la matrice est diagonalisable et trouver le polynôme annulateur unitaire de plus petit degré *on utilisera la propriété : A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de A est un polynôme annulateur de A*

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_1}(X) = (X-1)^3$, $E_1(A_1) = Vect((1,-2,1)$, $P = \chi_{A_1}$.

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_2}(X) = X(X-1)(X-2)$, $E_0(A_2) = Vect((1,-1,1)), E_1(A_2) = Vect((0,1,0)), E_2(A_2) = Vect((-1,1,1))$, $P = \chi_{A_2}$.

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.*Rép :* $X_{A_3}(X) = (X-4)(X-1)^2$, $E_1(A_3) = Vect((-1,1,0),(-1,0,1)), E_4(A_3) = Vect((1,1,1),$, $P = (X-4)(X-1)$.

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. *Rép :* $X_{A_4}(X) = (X-1)(X-2)^2$, $E_1(A_4) = Vect((4,-4,1))$, $E_2(A_4) = Vect((2,-3,1))$, $P = \chi_{A_4}$.

5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Rép :* $X_{A_5}(X) = (X+1)(X-1)^2$, $E_{-1}(A_5) = Vect(1/2 * a, -1, 1)$, $E_{-1}(A_5) = Vect((1,0,0))$, $P = \chi_{A_5}$.

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\omega \in \mathbb{C}$

1. Montrer que si ω est une valeur propre d'ordre de multiplicité m de A, alors $\bar{\omega}$ est une valeur propre d'ordre de multiplicité m de A
2. On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$.
   (a) A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
   (b) A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?
   (c) Montrer que n est pair.
3. On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$.
   (a) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
   (b) En déduire la forme du polynôme caractéristique de A.
   (c) Montrer que le rang de A est pair.

Exercice 5.
1. Montrer que Φ défini par $\Phi(M) = M + tr(M)I_n$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
2. Montrer que Φ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
3. En déduire un polynôme annulateur de degré 2.
4. Φ est-il bijectif ? Si oui, calculer Φ^{-1}.