classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°21$ du 23 Mars 2026**

CETTE SEMAINE, la colle aura le FORMAT SUIVANT :

1. Une question de cours qui comportera :
   (a) Un développement en série entière avec son rayon de convergence (seuls 3 étudiants sur 16 ayant choisi le sujet CCINP ont su écrire correctement le DSE de $(1+x)^\alpha$ et son rayon de convergence !)
   (b) Un énoncé parmi les trois théorèmes sur les intégrales à paramètre.
   (c) Un énoncé (ou démo pour $(\star)$) sur les espaces préhilbertiens réels ou euclidien.
2. Un exercice sur les espaces vectoriels normés.
3. Un exercice court sur les intégrales à paramètre.

Démo $(\star)$ pour le groupe 5, Raphaël-Ange du groupe 2, Pacôme du groupe 7 et Marguerite du groupe 1.

1 Intégrales à paramètre

Vous devez savoir énoncer et appliquer les théorèmes suivants :

1. Théorème de continuité des intégrales à paramètre.
2. Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre, appelé aussi Théorème de Leibniz.
3. Théorème de convergence dominée à paramètre continu.
4. On retiendra trois méthodes pour trouver une limite d'une fonction définie par une intégrale à paramètre :
   — Encadrement et théorème des gendarmes.
   — Changement de variable pour faire sortir le paramètre de l'intégrale et donner un équivalent
   — théorème de convergence dominé à paramètre continu. (parfois cette méthode est appliquée après la précédente)

Il faut impérativement connaître l'étude de *Gamma* à travers l'exercice suivant :

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

1. Γ est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
3. $\forall x>0, \Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$
4. $\forall n\in\mathbb{N}, \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$
5. Γ est C^∞ sur $]0,+\infty[$.
6. Justifier que Γ est convexe.
7. Calculer $\Gamma(1)$ et $\Gamma(2)$. Qu'en déduit-on ?
8. Donner un équivalent de $\Gamma(x)$ quand $x\to 0^+$.
9. Donner le tableau de variations de Γ.
10. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\Gamma(x)$.

Il est souhaitable de connaître l'exercice suivant :
Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
On pose $f(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f et g sont C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
3. Montrer $x\mapsto (f(x))^2+g(x)$ est constante sur $\mathbb{R}^+$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
5. En déduire $\Gamma(\frac{1}{2})$.

2 Espaces préhilbertiens réels et espaces euclidiens

Dans ce chapitre , vous devez savoir :

1. Comment montrer qu'une application est un produit scalaire,l' inégalité de Cauchy Schwarz, cas de l'égalité, la définition de la norme associée, **les identités de polarisation**.
2. Exemples de référence :**produit scalaire euclidien canonique sur $\mathbb{R}^n$, sur un espace de dimension fini, produit scalaire $< A, B > \mapsto \mathbf{tr}\,(A^T B)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produits scalaires définis par une intégrale sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.**
3. définition de vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, orthonormale, vecteur orthogonal à un sev, orthogonal d'un sev.
4. Caractérisation de l'orthogonal d'un sev dans le cas où celui-ci est de dimension finie **(à connaître absolument)**.
5. Théorème de Pythagore.
6. **Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre (démo** $(\star)$**)**. Définition d'une b.o.n. **Expression des coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n, d'un produit scalaire, de la norme (finalement dans un espace euclidien dans une b.o.n , le produit scalaire et la norme ont les mêmes expressions que le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$)**
7. Supplémentaire orthogonaux : définition, Tout sev d'un espace euclidien admet un supplémentaire orthogonal, existence de b.o.n dans un euclidien, tout sev de dim finie dans un préhilbertien admet un supplémentaire orthogonal.
8. Projecteur orthogonal sur un sev de dim finie dans un préhilbertien : définition . **Connaître l' Expression de $P_F(x)$ quand on connaît une b.o.n de F** .
9. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt**à savoir appliquer**.
10. Distance d'un vecteur à un sev : **définition et expression dans le cas où F est de dimension finie**.
11. Formes linéaires sur un espace euclidien :**Enoncé** du Théorème de représentation des formes linéaires : En dimension finie, toute forme linéaire est représentée par un produit scalaire. (**sa démo pour groupes** $\star$).