Programme de colles Quinzaine 10 (semaines du 2/3 et du 9/3)

Chapitre 13 : Espaces vectoriels

Beaucoup de définitions et d'exemples remarquables à connaître.

- Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels : définitions, exemples, un SEV est lui-même un EV. SEV engendré par une famille de vecteurs.
- Etant donnés deux SEV F et G d'un EV E, la somme $F+G$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de la forme $\vec{u}=\vec{f}+\vec{g}$ avec $\vec{f}\in F$ et $\vec{g}\in G$; cet ensemble est aussi un SEV de E.
  Si l'écriture $\vec{u}=\vec{f}+\vec{g}$ est unique (pour tous les $\vec{u}$) alors on dit que la somme est directe et on la note $F\oplus G$. Si, en plus, cette somme vaut E, on dit que F et G sont supplémentaires dans E.
- Familles finies de vecteurs :
  - familles libres ou liées : on peut toujours se ramener à résoudre un système homogène.
  - familles génératrice ou non : cela conduit à dire si un système $AX=B$ a des solutions quel que soit le second membre B.
  - une base est un famille libre et génératrice. On peut alors écrire tous les vecteurs de E de façon unique comme combinaisons linéaire des vecteurs de la base, les coefficients sont les coordonnées du vecteur dans $\mathcal{F}$, on peut représenter les vecteurs par des colonnes de coordonnées.
    Dans certains espaces de référence, il y a des bases canoniques à connaître.

Chapitre 14 : Analyse asymptotique

Comparaison asymptotique de suites ou de fonctions

- Différence fondamentale entre les suites et les fonctions : pour les fonctions il faut impérativement préciser où on travaille.
- Domination : le quotient est borné (localement pour les fonctions). Négligeabilité : la limite du quotient est 0. Equivalence : la limite du quotient est 1.
- Lien entre les relations : un o est un O, un $\sim$ est un O...
- On peut travailler avec les équivalents pour étudier localement un signe, pour obtenir une limite. Les équivalents sont compatibles avec les produits, les quotients, les puissances, les substitutions mais pas avec les additions ni les compositions.
- Equivalents usuels : polynômes (en 0 et en $\pm\infty$), sin et cos (en 0), $\ln(1+x)$ et e^x-1.

La seconde partie du chapitre est consacrée à un nouvel outil : le développement limité

- Une définition à bien connaître.
- La formule de Taylor Young assure l'existence des DL pour les fonctions régulières ; elle fournit les premiers DL de référence.
- On peut calculer des DL par opérations : combinaisons linéaires, produits, composition et quotient avec le DL de $\frac{1}{1-u}$, en dérivant ou en primitivant.
- Les DL de référence doivent être connus par cœur ou bien être retrouvés très rapidement :

$$\frac{1}{1-x},\ \ln(1+x),\ \mathrm{Arctan}(x),\ (1+x)^\alpha\ (\alpha\in\mathbb{R}),\ \mathrm{e}^x,\ \cos(x),\ \sin(x),\ \mathrm{ch}(x),\ \mathrm{sh}(x)$$

- On a annoncé que le DL est outil, c'est donc qu'il est utile ! Les DL fournissent des équivalents, ils permettent de lever des formes indéterminées, d'étudier des positions relatives (localement), de trouver des asymptotes.

Démonstrations :

- $\ln(n)=o(n)$
- $\forall a\in\mathbb{R},\ a^n=o(n!)$ [$\star$].
- par le calcul, donner le DL de tan en 0 à l'ordre 5.
- unicité du DL [$\star$].

Trois types de colles sont proposés :

- Normal : une question de cours (une définition, une démonstration -hors [⋆]) ; un des exercices proposé ci-après ; un exercice au choix du colleur.
- Etoile : une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [⋆]) puis un ou des exercices au choix du colleur. Les étudiants qui souhaitent ce type de colle s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle).
- ENAC pour Arzhela, Paul et Simon : le premier exercice porte sur de la logique et des applications, en s'inspirant des premières questions du sujet EPL-S 2023.

Exercice n° 1

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (X^2; (X-1)^2; (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice n° 2

Soit $F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y + z = 0\}$ et $G = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + 2z = 0\}$.

1. Prouver que F et G sont des SEV de $\mathbb{R}^3$.
2. En donner des bases.
3. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
4. Déterminer une base de $F \cap G$.

Exercice n° 3

On considère $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f puis justifier que f admet des développements limités à tout ordre en 0.
2. Déterminer l'équation de la tangente de $f(x)$ au point d'abscisse 0, préciser les positions relatives de la courbe de f et de la tangente.

Exercice n° 4

Peut-on prolonger $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?