Programme de colles Quinzaine 11 (semaines du 16/3 et du 23/3)

Chapitre 15 : Dénombrement et probabilités

Des définitions théoriques à savoir reconnaître dans les exemples concrets.

- Dénombrement : listes, arrangements et combinaisons d'éléments d'un ensemble fini.
- Probabilités : expérience aléatoire, issues, univers, événements, système complet d'événements, probabilité, probabilité conditionnelle.

Des résultats de cours à connaître pour identifier les situations dans lesquelles ils s'appliquent.

- Dénombrement : nombre de parties d'un ensemble, nombre de $p-$listes, de $p-$arrangements et de $p-$combinaisons.
- Probabilités : s'il y a équiprobabilité sur un univers fini, le calcul des probabilités se ramène à un problème de dénombrement ($\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
- Probabilités conditionnelles : probabilités composées, totales, formule de Bayes.

Démonstrations à connaitre :

- Soit Ω un ensemble fini. $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$. *Deux preuves vues en classe : avec recurrence, ou sans* $[\star]$.
- Formule de Pascal.

Chapitre 16 : EV de dimensions finies

On poursuit l'étude des EV, il faut être au clair sur le chapitre 13 pour bien comprendre !

- Un EV de dimension finie est un EV qui admet une famille génératrice finie. Tous les EV dont on connait des bases canoniques sont donc de dimensions finies.
- Une base est une famille libre et génératrice, si on a une famille qui est seulement génératrice on peut en extraire une base (th. de la base extraite) ; si on a une famille qui est seulement libre on peut la compléter en une base (th. de la base incomplète).
- Le théorème de la base extraite a pour conséquence de garantir l'existence de bases dans les EV de dimensions finies.
- Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice finie d'un espace E. $|\mathcal{F}|$ est un majorant pour le cardinal des familles libres de E. En conséquence : toutes les bases de E ont même cardinal, c'est cet entier naturel non nul qu'on prend comme définition de la dimension de E (et on pose $\dim\{0\} = 0$ - c'est écrit sans flèches mais ce ne sont pas les mêmes zéros).
- Travailler dans un espace dont on connait la dimension permet de gagner du temps dans beaucoup de situations. Ainsi, dans un espace de dimension $n > 0$:
  - une famille ayant strictement moins de n vecteurs ne peut pas être génératrice ;
  - une famille ayant strictement plus de n vecteurs ne peut pas être libre ;
  - pour qu'une famille de n vecteurs soit une base il suffit qu'elle soit libre **ou** qu'elle soit génératrice (une seule des deux conditions à prouver si la famille a le « bon » cardinal).
- Soit E un EV de dimension finie $n > 0$ et F un SEV de E.
  - F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$;
  - $E = F$ si, et seulement si, $\dim(F) = \dim(E)$;
  - F admet des supplémentaires dont la dimension est $\dim(E) - \dim(F)$.
  - Soit G un autre SEV de E. $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ (Grassmann).
  - On savait déjà que F et G sont supplémentaires dans E si, et seulement si, $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$. On a le droit de remplacer une des deux conditions (celle qu'on veut) par une condition souvent plus simple à obtenir : $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstrations :

- Théorème de la base extraite.
- Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice finie d'un espace E. $|\mathcal{F}|$ est un majorant pour le cardinal des familles libres de E $[\star]$.
- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E. F admet des supplémentaires et leur dimension est $\dim(E) - \dim(F)$.

Trois types de colles sont proposés :

- Normal : une question de cours (une définition, une démonstration -hors [⋆]) ; un des exercices proposé ci-après ; un exercice au choix du colleur.
- Etoile : une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [⋆]) puis un ou des exercices au choix du colleur. Les étudiants qui souhaitent ce type de colle s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle).
- ENAC pour Arzhela, Paul et Simon : le premier exercice porte sur de l'arithmétique ou des calculs de sommes doubles, en s'inspirant des EPL-S 2022 et 2023.

Exercice n° 1

Combien y a-t-il d'annagrammes du mot « chocolat » ? *(On ne demande pas que mots obtenus aient un sens).*

Exercice n° 2

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut 1/2. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Exercice n° 3

Trouver une base et un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\}$.

Exercice n° 4

Donner un supplémentaire de $E = \{P \in \mathbb{K}_2[X] \ / \ P = XP'\}$ dans $\mathbb{K}_2[X]$.