Programme de colles Quinzaine 12 (semaines du 30/3 et du 6/4)

Algèbre :

Chapitre 16 : EV de dimensions finies

Savoirs-faire à maîtriser :

- Ecrire sous forme de Vect un SEV de $\mathbb{K}^3$ ou $\mathbb{K}^4$ donné par une équation cartésienne.
- Trouver la dimension d'un SEV, d'une intersection de SEV, d'une somme de SEV.
- Supplémentaires en dimension finie :
  - donner la dimension d'un supplémentaire ;
  - raisonner avec des bases (si on a une base $\mathscr{B}_F$ du SEV F, trouver un supplémentaire de F revient à compléter $\mathscr{B}_F$ en une base de E).

Chapitre 18 : Applications linéaires

On poursuit l'étude des EV avec les applications linéaires entre EV. Il est donc impératif d'être au clair sur les chapitres d'algèbre précédents. Dans la suite, E et F sont des $\mathbb{K}$-EV, $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

- une application linéaire est une application entre deux EV qui a la particularité de respecter les combinaisons linéaires.
- Le lien entre applications linéaires et SEV est fort : les images directes par u des SEV de E sont des SEV de F, les images réciproques par u (*quèsaco ?*) des SEV de F sont des SEV de E. Deux cas particuliers importants : le noyau de u et l'image de u.
- Endomorphismes remarquables d'un EV : homothéties, projections et symétries.

Démonstrations à connaitre :

- Si u est un isomorphisme $E \to F$ alors u^{-1} est un isomorphisme $F \to E$.
- Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. u est injective ssi $\ker(u) = \{0_E\}$.
- Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est une projection ssi $u^2 = u$, c'est alors la projection sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\ker(u)$ [$\star$].

Savoirs-faire à maîtriser :

- Vérifier qu'une application est linéaire.
- Vérifier qu'une application est un endomorphisme.
- Trouver un noyau, une image.

Analyse :

Chapitre 17 : Intégration

On donne du sens aux intégrales qui ont été introduites l'an dernier d'un point de vue géométrique ; en particulier, on vient expliquer le lien entre surfaces et primitives qui est utilisé depuis la Terminale mais qui n'est pas intuitif. Les exercices de ce chapitre ne sont pas nouveaux (à part les sommes de Riemann) : on revoit les différentes techniques d'intégration (en visant l'assurance sur les changements de variables, rappeler la formule et ses hypothèses est toujours une bonne idée).

Concepts à comprendre dans ce chapitre :

- Définir l'intégrale des fonctions en escalier est simple, les propriétés *naturelles* de l'intégrale se prouvent facilement : linéarité, positivité, croissance et relation de Chasles.
- On approche globalement des fonctions continues par des fonctions en escalier sur des segments (la notion de norme infinie sera approfondie l'an prochain) et on définit l'intégrale des fonctions continues par ce biais. Les propriétés *naturelles* de l'intégrale sont toujours vraies mais plus difficiles à établir.
- Les sommes de Riemann permettent de voir l'intégrale comme une limite de suite ; d'un point de vue numérique cela s'appelle les méthodes des rectangles. Si on envisage les choses dans l'autre sens, la limite d'une somme de Riemann est une intégrale qu'on peut calculer.
- Le théorème fondamental de l'analyse donne le lien entre intégrale et primitive.
- Les formules de Taylor indiquent le lien entre une fonction régulière et le polynôme de Taylor :
  - la formule de Taylor avec reste intégral est globale : en tout point, on a une expression exacte du reste à l'aide d'une intégrale ;
  - l'inégalité de Taylor Lagrange est également globale : on a une majoration en tout point du module du reste. Cette majoration est plus simple à utiliser que le reste intégral ;
  - la formule de Taylor Young indique que le reste est localement négligeable.

Démonstrations à connaitre :

- Dans le cas des fonctions lipschiziennes, les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale [⋆].
- Théorème fondamental de l'analyse [⋆].
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Inégalité de Taylor Lagrange

Savoirs-faire à maîtriser :

- Calculer une intégrale avec l'aide d'une primitive, d'une IPP ou d'un changement de variable.
- Intégrer une fraction rationnelle après l'avoir décomposé en éléments simples.

Trois types de colles sont proposés :

- Normal : une question de cours (une définition, une démonstration -hors [⋆]) ; un des exercices proposé ci-après ; un exercice au choix du colleur.
- Etoile : une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [⋆]) puis un ou des exercices au choix du colleur. Les étudiants qui souhaitent ce type de colle s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle).
- ENAC pour Arzhela, Paul et Simon : le premier exercice porte sur de l'arithmétique en s'inspirant des EPL-S 2022 et 2023.

Exercice n° 1

Soit l'application $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $u(x; y; z) = (2x + y + z; x - y - 2z)$.

1. Prouver que u est une application linéaire.
2. Trouver une base de $\ker(u)$.
3. Trouver un supplémentaire de $\ker(u)$ *(dans quel espace ?)*.

Exercice n° 2

Pour tout polynôme P de $K_3[X]$ on pose $f(P) = P - (1 - X)P'$.

1. Prouver que f est un endomorphisme de $K_3[X]$
2. Trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Trouver une base de $\ker(f)$.
4. Montrer que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}_3[X]$.

Exercice n° 3

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

1. Prouver que (I_n) converge vers 0.
2. Pour $n \geq 0$, calculer $I_{n+1} + I_n$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercice n° 4

On considère, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

1. Justifier que F existe sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la parité de F.
3. Quel est le signe de $F(x)$ en fonction de x ?
4. Déterminer les variations de F.
5. Prouver que $F(x)$ admet une limite finie en $+\infty$.