Programme de colles Quinzaine 14 (semaines du 25/5 et du 1/6)

Chapitre 20 : Séries

Un chapitre technique dans lequel il faut maîtriser le vocabulaire spécifique et bien faire la différence entre les objets manipulés : étant donnée une suite de scalaires (souvent réels) $(u_n)_n$ on s'intéresse à une autre suite : $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n$. Cette seconde suite s'appelle *série*, ses termes s'appellent *sommes partielles*, on dit que u_n est le *terme général* de la série.

L'objet principal du chapitre est de déterminer si la série converge ou non (sa *nature*) en étudiant son terme général. Lorsqu'elle converge, sa limite s'appelle *somme* et, sauf cas particulier, on ne s'intéresse pas à sa valeur.

Savoirs-faire à maîtriser :

- Connaître les exemples de références : séries géométrique, exponentielle, de Riemann (dont la série harmonique). La série harmonique alternée est également un exemple important : convergente mais pas absolument convergente.
- Reconnaître la divergence grossière.
- Si on a une SATP alors on peut utiliser les comparaisons sur le terme général. On compare à une autre suite avec $\leq$, des O, des o ou encore des $\sim$ qu'on peut obtenir avec des DL.
- Si le signe n'est pas constant, on peut utiliser la convergence absolue qui implique la convergence.

Démonstrations à connaitre :

- Nature des séries géométriques et valeur de la somme lorsqu'il y a convergence.
- La série harmonique diverge.
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$. [⋆]

Chapitre 21 : matrice d'une application linéaire

Dans ce chapitre, on peut faire la confusion entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

E et F sont des $\mathbb{K}$-EV de dimensions finies dont des bases sont $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. On considère $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Lien entre matrices et applications linéaires :

- On définit la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ par colonnes : ses colonnes sont les images des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ par u, exprimés dans $\mathcal{B}_F$.
- Si on change les bases, on change de matrice : on donc (potentiellement) plusieurs matrices qui représentent la même application linéaire. Dans le cas d'endomorphismes (et donc de matrices carrées), on dit que les matrices sont semblables.
- Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire canoniquement associée à A est $X \mapsto AX$. (Avec $X \in \mathbb{K}^p$ et $AX \in \mathbb{K}^n$).
- En utilisant l'application linéaire canoniquement associée à une matrice, on définit le noyau, l'image et le rang d'une matrice.
  On « transporte » le théorème du rang de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $p = \mathrm{rg}(A) + \dim(\ker(A))$.

D'un point de vue pratique :

- Soit un vecteur x de E représenté par la colonne X. Déterminer $u(x)$ correspond à calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)X$.
- Composer des applications linéaires correspond à multiplier leurs matrices (attention aux bases et à l'ordre du produit : il est conseillé d'écrire les diagrammes).
- Changer de base correspond à changer de point de vue sur les vecteurs. Par exemple, si $x \in E$ est représenté par X dans $\mathcal{B}_E$ et par X' dans $\mathcal{B}'_E$: on aura $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E)X'$.
  La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E)$ est une matrice de passage.
- Les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ correspondent aux images des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ par u, elles constituent donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. Si on veut en extraire une base, on peut appliquer l'algorithme de Gauss sur les colonnes.
- Déterminer le noyau de u revient à résoudre l'équation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)X = 0$, c'est-à-dire un système linéaire *(de quelle taille ?)*. On le résout en appliquant l'algorithme de Gauss sur les lignes.
- u est un isomorphisme ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible. En pratique : on calcule le rang de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ en utilisant l'algorithme de Gauss sur les lignes et les colonnes, on a inversibilité ssi il vaut $\dim(E) = \dim(F)$.

Trois types de colles sont proposés :

— Normal : une question de cours (une définition, une démonstration -hors [⋆]) ; un des exercices proposé ci-après ; un exercice au choix du colleur.

— Etoile : une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [⋆]) puis un ou des exercices au choix du colleur. Les étudiants qui souhaitent ce type de colle s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle).

— ENAC pour Arzhela, Paul et Simon : un des exercices est sous forme de QCM sur des probabilités, ou bien l'intégration d'une fraction rationnelle (dans l'esprit des annales).

Exercice n° 1

Déterminer les natures des séries suivantes et calculer leurs sommes lorsqu'elles convergent :

$$\sum \text{Arctan}(n) \quad ; \quad \sum \frac{(-1)^2}{(n+2)!} \quad ; \quad \sum \frac{5}{7^n} \quad ; \quad \sum \frac{2}{\sqrt{3n}}$$

Exercice n° 2

On considère $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

1. Justifier que la série est convergente.
2. Décomposer $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ en éléments simples.
3. En faisant apparaître un télescopage, donner la valeur de la somme de la série.

Exercice n° 3

Soit u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par $u(P) = 2XP' + (1-X^2)P''$.

1. Déterminer la matrice de u relativement à la base canonique.
2. En déduire $\text{rg}(u)$, $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$.

Exercice n° 4

Soit $n \geq 1$. On travaille dans $\mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'endomorphisme u défini par $u(P(X)) = P(X+1)$.

1. Déterminer $\text{Mat}_{can}(u)$.
2. Justifier que $\text{Mat}_{can}(u)$ est inversible.
3. Sans faire de calcul, déterminer la matrice inverse de $\text{Mat}_{can}(u)$.