Chapitre 3 : généralités sur les fonctions et nouvelles fonctions de référence

1 Un peu de théorie pour commencer

Dans ce paragraphe, A, B et C désignent des ensembles non vides.

Définition
Une **application** f de A vers B est un processus qui à tout élément de A associe un unique élément de B.

On dit que A est l'**ensemble de départ**, que B est l'**ensemble d'arrivée**.

On note : $f : A \to B$.

Si A et B sont des parties de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) on dit que f est une **fonction**.

Exemples :

a) L'application qui, à tout élève de la classe de PCSI, associe sa couleur préférée :

b) La fonction f qui, à tout nombre réel strictement positif associe la somme de ce nombre et de son cosinus.

c) Si $B \subset A$, la **fonction indicatrice** de B est

d) Pour tout ensemble A, il existe une application particulière, l'**identité** notée Id_A et définie par :

Définition
Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$. On appelle **composée de f par g** l'application $\left\{\right.$

On la note

Exemple :

Définition
Soit A et B deux ensembles, f une application $A \to B$.

- On dit que f est **surjective** lorsque tout élément de B a un antécédent (au moins) par f. Autrement dit :

- On dit que f est **injective** lorsque tout élément de B a au plus un antécédent par f. Autrement dit :

Remarques :

a) on peut également dire que f est injective si, et seulement si, pour tout $y \in B$ l'équation $f(x) = y$ a au plus une solution.

b) Soit $f : A \to B$.

- Si f est surjective et que Card A est fini alors :
-

Exercice (théorique)
Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$. Prouver que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

Réponse
Soit

Remarque : pour prolonger l'exercice, montrez que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ l'est aussi.

Définition
Soit $f : A \to B$. On dit que f est **bijective** lorsqu'elle est surjective et injective, c'est-à-dire lorsque tout élément de B a exactement un antécédent par f. Autrement dit :

Proposition
Soit $f : A \to B$, une application bijective.
Il existe une unique application $B \to A$ appelée **réciproque** de f, notée f^{-1}, telle qu'on ait :

Remarque : Soit $f : A \to B$, une application bijective. On a :

$$f^{-1} \circ f = \qquad \text{et} \quad f \circ f^{-1} =$$

Ces notions théoriques sont très importantes. Pour s'en convaincre, étudions et corrigeons les deux exemples suivants :

a) $\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2+2x} \iff x+1 = x^2+2x \iff x^2+x-1 = 0 \iff x \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

b) $x^2 = 9 \iff \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \iff x = 3$.

Méthode (Pour appliquer une fonction à une équation)

1) on détermine le *domaine de définition* $\mathcal{D}$ de l'équation c'est-à-dire les valeurs pour lesquels l'équation a du sens ;
2) on écrit « $\forall x \in \mathcal{D}$ » ;
3) On applique f aux deux membres de l'équation pour en obtenir une nouvelle :
   - si f est bijective alors : $A = B \qquad f(A) = f(B)$
   - sinon : $A = B \qquad f(A) = f(B)$ et il faut finir en

Mise en œuvre : exercices 5 et 11.

Remarque : pour une inégalité, on commence aussi par étudier le domaine de définition de la fonction mais, en plus, il faut faire attention aux variations de la fonction, on y reviendra un peu plus loin.

2 Généralités sur les fonctions

Définition

Une **fonction** est une application qui opère entre des ensembles numériques.
Lorsque la variable est réelle, on la note souvent x ou t, lorsqu'elle est complexe : z.

Exemples :

a) La fonction f associe à tout réel x le tiers du carré de x.

b) La fonction inverse :

c) La fonction tangente :

Méthode (Pour connaître le domaine de définition d'une fonction $f(x) = \dots$)

1. on repère les éléments de l'expression qui peuvent ne pas avoir de sens, notamment :
   —
   —
   —
2. Pour chaque problème potentiel on trouve l'ensemble des valeurs qui sont interdites. On obtient une famille d'ensembles $A_1, \dots, A_n$.
3. Le domaine de définition de la fonction est $\mathbb{R} - \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)$.

Mise en œuvre : exercices 2 et 5.

Exercice

Quel est le domaine de définition de $f(x) = \ln(x^2) + \sqrt{\frac{x+3}{x+2}}$?

Réponse
Soit $x \in \mathbb{R}$. $\ln(x^2)$ existe si, et seulement si,

Remarque : attention à bien comprendre les compositions.

Par exemple, $x \mapsto \ln(\cos x) =$ $\circ$ (x) est définie sur

Définition
Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, f une fonction définie sur $\mathcal{D}$. Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La **courbe représentative** de f (ou **graphe** de f) est

Exemples : les courbes représentatives des fonctions affines sont les
celles des polynômes de degré 2 des , celle de la fonction inverse est une

Définition
Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, f une fonction définie sur $\mathcal{D}$.

- Soit A est une partie de $\mathcal{D}$. L'**image directe** de A par f est $\{f(x) \ / \ x \in A\}$.
  C'est une partie de $\mathbb{R}$, on la note $f(A)$.

- Soit $B \subset \mathbb{R}$. L'**image réciproque** de B par f est
  C'est une partie de $\mathcal{D}$, on la note $f^{-1}(B)$.

Exemple : on considère, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. On a :

$f(\mathbb{R}) =$; $f(]-2;5]) =$; $f^{-1}([0;25]) =$; $f^{-1}([-3;-1[) =$

Remarque : dans l'exemple précédent, les images des intervalles par f sont des intervalles.

C'est dû au fait que f est

Définition
Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, f une fonction définie sur $\mathcal{D}$.

i. On dit que f est **majorée** lorsque :

ii. On dit que f est **minorée** lorsque :

iii. On dit que f est **bornée** lorsque :

iv. On dit que le réel α est **le maximum** de f lorsque :

v. On dit que le réel α est le **le minimum** de f lorsque :

Exemples :

a) La fonction cos est bornée car :

b) La fonction $x \mapsto x^2$ est bornée sur $[-2;5]$ car :

En revanche, elle n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ car :

Remarques :

a) Graphiquement, si f est bornée, sa courbe représentative est

b) Si la fonction f est majorée elle admet une infinité de majorants. Lorsqu'il existe, le maximum est le plus petit majorant.
Attention : il peut exister un plus petit majorant mais pas de maximum. Par exemple :

c) On peut reprendre la remarque précédente pour les fonctions minorées, les minorants et l'éventuel minimum.

d) Un **extremum** est un maximum ou un minimum. Le pluriel d'extremum est *extrema* (mais on voit aussi parfois extremum*s*).

e) Les définitions que l'on vient de voir pour les fonctions concernent en fait les sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Par exemple :

- $[8;+\infty[$ est une partie de $\mathbb{R}$ minorée par 7 :
- $[-1;1]$ est une partie de $\mathbb{R}$ bornée :

Dans les définitions données pour les fonctions, la partie de $\mathbb{R}$ considérée est $f(\mathcal{D})$.

Méthode (Pour montrer qu'une fonction $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est bornée)
il suffit de montrer que $|f|$ est bornée, c'est-à-dire trouver $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathcal{D},\ |f(x)| \leq M$.

Mise en œuvre : exercice 1.

Remarque : la méthode précédente permet de n'avoir qu'un nombre à trouver.

3 Variations des fonctions

Définition
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $I \subset \mathcal{D}$, un intervalle.

— On dit que f est **croissante sur** I lorsque

— On dit que f est **décroissante** sur I lorsque

— On dit que f est **monotone sur** I lorsque f est croissante sur I ou bien que f est décroissante sur I.

Exemple : $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[1;3]$ mais elle n'est pas monotone sur $[-2;2]$.

Remarque : on obtient les définitions de **strictement croissante** et **strictement décroissante** en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la définition précédente. Un fonction strictement croissante ou bien strictement décroissante est dite **strictement monotone**.

Exercice
Prouver que la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$.
L'est-elle sur $\mathbb{R}^*$?

Réponse
Traitons le cas

Méthode (Pour appliquer une fonction f à une inéquation)
1) on détermine le *domaine de définition* de l'inéquation $\mathcal{D}$.
2) Si les deux membres de l'inéquation prennent leurs valeurs dans un intervalle sur lequel f est monotone, on applique f :
   — en ne changeant pas le sens de l'inégalité si f est croissante,
   — en changeant le sens de l'inégalité si f est décroissante.
3) Sinon, on procède par disjonction de cas pour se ramener à des intervalles sur lesquels f est monotone.

Mise en œuvre : exercice 5.

Exercice
Résoudre $\dfrac{1}{x+3} < \dfrac{1}{x^2-1}$.

Réponse
Tout d'abord, le domaine de définition de cette inéquation est :

On souhaite appliquer la fonction inverse qui est monotone sur :

Il faut donc déterminer

Remarques :
- on a travaillé par
- Cet exemple pouvait être traité différemment :

Théorème (de la bijection)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Proposition
Soit I un intervalle, f et g deux fonctions définies sur I. Si f et g sont toutes les deux (strictement) croissantes sur I alors $f+g$ est aussi (strictement) croissante sur I.

Remarque : on a un résultat analogue pour des fonctions décroissantes.

Exemple : le fonction $f(x) = x + \mathrm{e}^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions strictement croissantes. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R}) =$

Pour déterminer $f(\mathbb{R})$, on s'est servi de

Remarque : la bijectivité de f nous assure l'existence d'une réciproque pour f mais ne nous donne pas d'expression algébrique pour cette réciproque.

4 Dérivation et applications

Dans ce paragraphe, on rappelle les résultats vus au lycée (et on rajoute la dérivée d'une composée). La dérivation sera revue de façon rigoureuse dans un chapitre ultérieur.

4.1 Elements de théorie sur la dérivation

Dans ce paragraphe, on désigne par f une fonction définie sur un certain domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, I est un intervalle inclus dans $\mathcal{D}$ (et donc f est définie sur I).

Définition
Soit $a \in I$. Si elle existe, la limite : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelée **nombre dérivé** de f en a.
On la note $f'(a)$ et on dit que f est dérivable en a.

Exemple : déterminons le nombre dérivé de $f(x) = x^2$ en $a = 3$.

Proposition
Soit $a \in I$ et soit $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans un repère.
f est dérivable en a si, et seulement si, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente (non verticale) au point d'abscisse $(a; f(a))$.
L'équation de cette tangente est alors :

$$y =$$

Remarques :

a) La tangente peut avoir plusieurs points d'intersections avec $\mathcal{C}_f$. Le "contact tangentiel" est local, c'est-à-dire "autour de $(a; f(a))$".

b) $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a : si on connait la tangente, on déduit $f'(a)$.

c) La **fonction dérivée** f' est définie partout où f est dérivable, c'est-à-dire sur un sous-ensemble de $\mathcal{D}$, appelé **domaine de dérivabilité**.

Quelques limites remarquables s'obtiennent avec la définition du nombre dérivé :

Proposition

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} =$$

Démonstration
Par exemple la dernière : la limite cherchée est la définition de $\sin'(0)$. Or ce nombre dérivé existe et il vaut $\cos(0) = 1$. ■

4.2 Opérations sur les fonctions et dérivation

Pour calculer une dérivée, on a besoin de connaître le tableau des dérivées remarquables (disponible en ligne et à annexer à votre cours si vous ne le connaissez pas déjà) et des règles de calcul avec la dérivation.

Proposition
Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies et dérivables sur leurs domaines de définitions respectifs , λ et μ deux réels. Alors,

i. $f+g$, $\lambda f + \mu g$ et fg sont définies et dérivables sur $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Plus précisément, on a :

$$(f+g)' = \qquad ; \qquad (\lambda f + \mu g)' = \qquad ; \qquad (fg)' =$$

ii. $\frac{f}{g}$ est définie et dérivable sur :

Plus précisément, sur cet ensemble on a : $\left(\frac{f}{g}\right)' =$

iii. $g \circ f$ est définie et dérivable sur :

Plus précisément, sur cet ensemble on a : $(g \circ f)' =$

Exemple : dériver la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{\mathrm{e}^x \sqrt{x^2+1}}$.

4.3 Applications de la dérivation

4.3.1 Etude locale d'une fonction

Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, dérivable en $a \in \mathcal{D}_f$.

Proposition
La meilleure approximation affine de la fonction f au voisinage de a est $x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$.

Remarques :

a) Ce résultat s'interprète graphiquement :

b) Cette approximation par un polynôme (ici de degré 1 ou 0) s'appelle un **développement limité**. Un chapitre dédié leur sera consacré.

c) Une application de ce résultat est la **méthode d'Euler** pour construire des solutions numériques aux équations différentielles que l'on ne sais pas résoudre.

4.3.2 Etude des variations et recherche d'extrema

Théorème
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathcal{D}_f$. On peut déduire les variations de f à-partir du signe de sa dérivée :

- f est croissante sur les intervalles sur lesquels f' est positive,
- f est décroissante sur les intervalles sur lesquels f' est négative.

Remarque : pour alléger l'énoncé, on a omis de parler de stricte monotonie. La fonction est strictement monotone sur un intervalle si la dérivée ne change pas de signe sur cet intervalle **et** s'annule au plus un nombre fini de fois sur cet intervalle.

Méthode (Pour étudier les extrema d'une fonction dérivable $f(x)$)
1) on détermine sa dérivée $f'(x)$;

2) on étudie le signe de $f'(x)$;

3) on construit le **tableau de variations** de $f(x)$;

4) les extrema locaux et globaux se lisent dans le tableau.

Mise en œuvre : exercice 3.

5 Étudier une fonction

5.1 Propriétés qui permettent de réduire le domaine d'étude

Définition
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) On dit que f est **paire** lorsque $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. D'un point de vue analytique, cela correspond à :

b) On dit que f est **impaire** lorsque $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine. D'un point de vue analytique, cela correspond à :

c) Soit T un réel. On dit que f est **T-périodique** lorsque $\mathcal{C}_f$ est stable par translation de vecteur $T\vec{i}$. D'un point de vue analytique, cela correspond à :

Exemples :

1. $f(x) = x^2 - 5x^4$ est paire. En effet,

2. pour tout entier n, $x \mapsto x^{2n}$ est paire.
3. pour tout entier n, $x \mapsto x^{2n+1}$ est impaire.

Lorsque la fonction à étudier présente une (ou plusieurs) des propriétés précédentes on peut restreindre son étude :

Proposition
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, T un réel.

a) Si f est paire on l'étudie sur

b) Si f est impaire on l'étudie sur

c) Si f est T-périodique, on l'étudie sur

Remarques :

1) une fonction peut être paire, impaire ou ni l'un ni l'autre.

2) Une fonction peut être paire et périodique (par exemple :). Il suffit alors de l'étudier sur :

3) en pratique, on n'étudie ces propriétés que lorsqu'il y a une bonne chance qu'elles soient vérifiées (leur expression algébrique fait intervenir des fonctions de référence qui les vérifient).

5.2 Plan d'étude d'une fonction

Méthode (Pour étudier une fonction $f(x)$)
1) on détermine son domaine de définition $\mathcal{D}_f$;
2) on détermine son domaine d'étude ($\mathcal{D}_f$ si f n'est ni paire, ni impaire, ni périodique) ;
3) on étudie les limites de f aux bornes de son domaine d'étude ;
4) on justifie que f est dérivable sur son domaine d'étude puis on détermine $f'(x)$;
5) on étudie le signe de $f'(x)$, on en déduit les variations de f ;
6) on contruit le tableau de variations complet de f (d'abord sur son domaine d'étude et on complète par déduction).

Mise en œuvre : exercices 1, 6, 8 et 9.

Remarque : pour alléger le cours, un exemple détaillé sera présenté dans les exercices de TD.

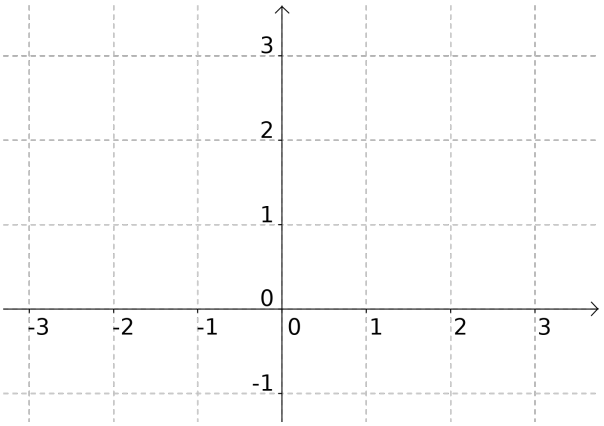
6 Fonctions de référence

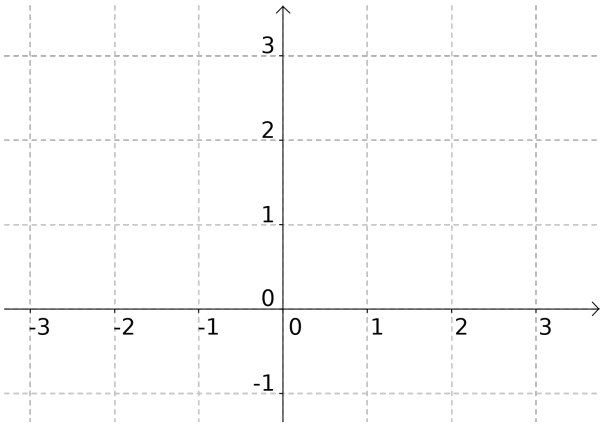
6.1 Valeur absolue, partie entière (inférieure)

Définition
Pour tout réel x,

— on rappelle que $|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

— il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$.
n est appelé la **partie entière (inférieure)** de x et noté $\lfloor x \rfloor$.





Remarque : clairement $x \mapsto |x|$ est paire car

6.2 Fonctions trigonométriques

On a revu cos, sin et tan dans une fiche du premier chapitre. Pour mémoire :

fonction	domaine de définition	parité	périodicité	Autre propriété notable
cos				
sin				
tan				

6.3 Fonctions trigonométriques réciproques



la fonction cos n'admet pas de fonction réciproque. En effet,

Il en va de même pour les fonctions sin et tan. Pour pouvoir construire des réciproques, il faut réfléchir sur les ensembles en jeu.

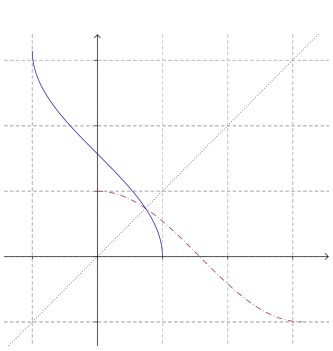
Définition
Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ et $A \subset \mathcal{D}_f$. La **restriction** de f à A est la fonction

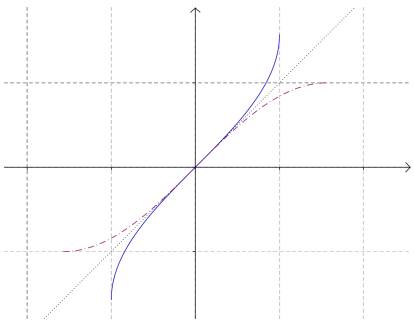
Définition

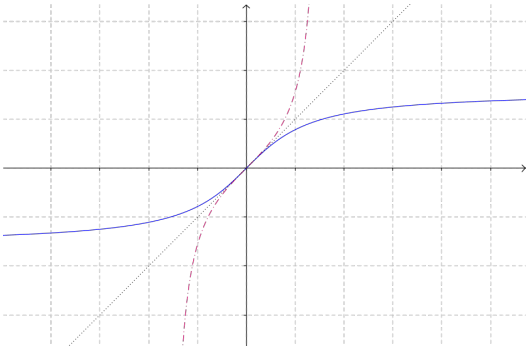
a) La fonction cos réalise une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$. On appelle sa bijection réciproque arccosinus, on la note arccos.

b) La fonction sin réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1; 1]$. On appelle sa bijection réciproque arcsinus, on la note arcsin.

c) La fonction tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. On appelle sa bijection réciproque arctangente, on la note arctan.







Remarque : il faut être vigilant sur les ensembles (et faire des figures !).

Par exemple :

$$\text{Arccos}(\cos(\frac{5\pi}{4})) =$$

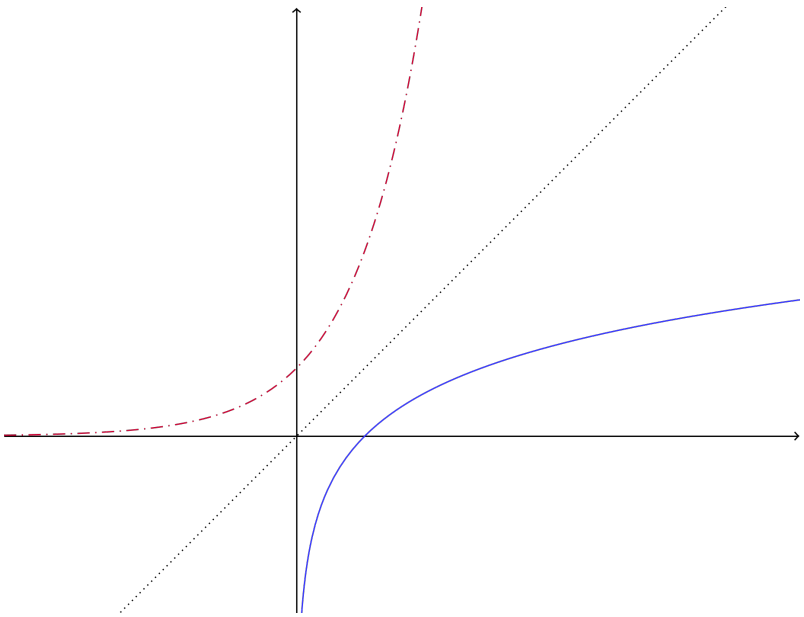
Proposition
Les fonctions trigonométriques réciproques sont dérivables et on a :

$\forall x \in$ $\text{Arccos}'(x) =$; $\forall x \in$ $\text{Arcsin}'(x) =$; $\forall x \in$ $\text{Arctan}'(x) =$

Démonstration
Par exemple pour Arccos :

Remarque : cette méthode pour déterminer la dérivée d'une réciproque est générale.

6.4 Exponentielle et logarithme népérien



6.5 Puissances et exponentielles

Définition
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. Le nombre $\exp(b \ln(a))$ est noté a^b.

Cette notation est cohérente avec la notation habituelle pour les puissances entières.
Par exemple : si $a \in \mathbb{R}^{+*}$, on a $\exp(2\ln(a)) = \exp(\ln(a^2)) = a^2$.
Finalement, ce qu'apporte cette définition, c'est du sens à a^b lorsque $a > 0$ et que b n'est pas entier.

Proposition
Les règles de calcul usuel avec les puissances entières s'appliquent toujours :

$$(\alpha\beta)^\gamma = \qquad ; \quad \left(\alpha^\beta\right)^\gamma = \qquad ; \quad \alpha^{\beta+\gamma}$$

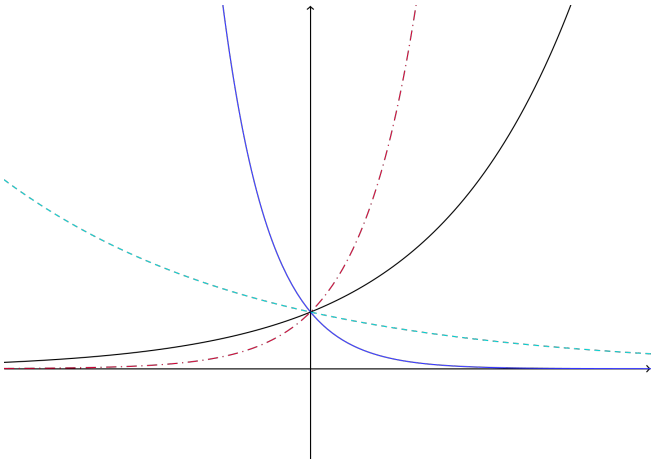
Remarque : pour simplifier la formulation de cette dernière proposition, on n'a pas précisé les conditions sur α, β et γ. Disons simplement qu'il faut les choisir pour que chaque expression ait du sens.

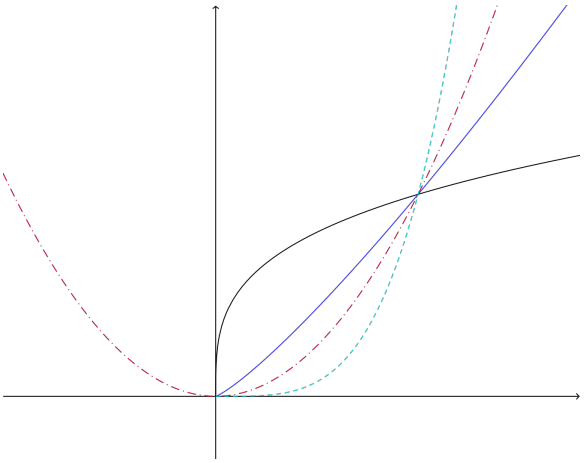
Définition

1. Soit $a > 0$. La fonction $\left\{ \begin{array}{l} \\ x \longmapsto a^x \end{array} \right.$ est appelée **exponentielle de base** a.
2. Soit $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. La fonction $\left\{ \begin{array}{l} \\ x \longmapsto x^b \end{array} \right.$ est appelée **puissance** b.

Remarque : l'étude détaillée de ces fonctions sera fait en exercice, leurs limites, leurs dérivées seront à savoir retrouver (il n'y a pas de difficulté particulière).

À gauche, $y = 0,3^x$, $y = 0,8^x$, $y = 1,5^x$, $y = 5^x$; à droite $y = x^2$, $y = x^{0,3}$, $y = x^{1,2}$, $y = x^{3,8}$:





Définition

La réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$ s'appelle le **logarithme décimal**.

On le note Log (ou $\log_{10}$) et son expression algébrique est : $\forall x \in$ $\quad$ $\mathrm{Log}(x) =$

Remarque : le logarithme décimal sert (entre autres) en chimie.