Chapitre 9 : Matrices

Du vocabulaire pour commencer

On appelle **structure algébrique** un ensemble muni d'opérations qui vérifient certaines caractéristiques. L'intérêt de l'étude de ces objet est que les propriétés qui sont démontrées sont relatives à la structure algébrique et non au contexte de l'ensemble en question. Par analogie, ce serait comme étudier les propriétés de tous les objets qui ont des roues : tout résultat s'appliquerait ensuite indifféremment aux voitures, aux motos, aux vélos, aux brouettes..

La seule structure algébrique dont l'étude soit au programme est celle d'**espace vectoriel**. D'autres (plus élémentaires) apparaissent furtivement dans le vocabulaire que nous utiliserons. On va, en guise de vulgarisation, exposer l'idée qu'il faut s'en faire.

- $\mathbb{Z}$ est stable par $+$, il y a un élément neutre (0), et chaque entier a un opposé : on dit que c'est un **groupe** (additif). Un autre ensemble au programme qui a une structure de groupe : l'ensemble nombres complexes de module 1, l'opération en jeu est ici $\times$.
- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont également des groupes additifs ; privés de 0 ce sont aussi des groupes multiplicatifs. Lorsqu'un ensemble possède ces deux qualités, on dit que c'est un **corps**. ($\mathbb{Q}$ est également un corps, mais ça ne nous servira pas).
- Un **espace vectoriel** est un ensemble stable par **combinaison linéaire**.
  Pour faire une combinaison linéaire, on a besoin de deux types d'objets : les **vecteurs** (qui sont les éléments de l'ensemble en question) et les coefficients de la combinaison linéaire qu'on appelle **scalaires**, ils appartiennent au corps sur lequel on construit la structure d'espace vectoriel.
  Nous avons déjà croisé des exemples d'espaces vectoriels : les vecteurs du plan, de l'espace, les ensembles de fonctions, les suites, les polynômes, les solutions d'une équation différentielle linéaire homogène.

Notations : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est le corps des scalaires. n, p et q désigneront des entiers naturels non nuls.

1 Opérations dans les ensembles de matrices

1.1 Combinaisons linéaires dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition

— Une matrice est un tableau de nombres.

— $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices ayant n lignes et p colonnes, à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Une telle matrice est dite de taille (n, p) ou $n \times p$.

— Les éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont notés de la forme $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$.

— On a un vocabulaire spécifique pour certains cas particuliers.
On parle de **matrice colonne** quand , de **matrice ligne** quand et de **matrice carrée** quand .

Dans ce dernier cas, on n'écrit pas $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ mais simplement

Remarque : une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a coefficients.

Exemples : une matrice ligne, une colonne et une matrice carrée :

Définition
Soit A et B deux matrices de même taille (n,p), λ un scalaire.

— $A+B$ est la matrice de taille (n,p) obtenue en additionnant les coefficients de A et B qui ont même position :

$$A+B=(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}+(b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}=$$

— λA est la matrice de taille (n,p) obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ :

$$\lambda A=\lambda(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}=$$

— une **combinaison linéaire** de A et B est une matrice de taille $n\times p$ de la forme :

$$\lambda A+\mu B=\lambda(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}+\mu(b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}=$$

avec λ et μ qui désignent des scalaires.

Exemple : $3\begin{pmatrix}2+\mathrm{i} & 3 & 0\\ i & -7+\mathrm{i} & 5\end{pmatrix}+\mathrm{i}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2+\mathrm{i}\\ -8 & 1 & 0\end{pmatrix}=$

Proposition
Dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

i. l'addition des matrices est **commutative** :

ii. l'addition des matrices a un **élément neutre** :

iii. toute matrice A admet un **opposé** qui vaut

Remarques :

a) toutes les matrices qui interviennent dans les combinaisons linéaires (et donc dans les additions) ont une même taille $n\times p$ qui est fixée. En particulier, la notion de matrice nulle, souvent notée 0, correspond en fait à « la matrice nulle de taille (n,p) » ; on note $0_{n,p}$ si on veut éviter toute ambiguité.

b) $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est donc un groupe additif.

Définition
Soit $(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]$.

La **matrice élémentaire** $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui en position (i,j) qui vaut 1.

On appelle **base canonique** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$.

Proposition
Toute matrice s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de la base canonique.

Démonstration (cas $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$)
La base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est :

Soit $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, on a $A=$

L'unicité de cette écriture est évidente. ■

Remarque : la notion de **base** sera centrale dans l'étude des espaces vectoriels, au second semestre.

1.2 Produit de matrices

Définition

Soit deux matrices : $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

La matrice $C = A \times B$ est la matrice de taille (n, q) dont les coefficients sont $c_{i,j} = \sum_{k=}$

Exemples :

a) $\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

.....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} =$

.....

c) $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$

.....

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

Remarques :

⚠ Le produit des matrices est **non-commutatif** : BA n'est pas nécessairement égal à AB.

⚠ Pour des raisons de taille BA peut même ne pas exister.

⚠ On peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$. On dit que le produit matriciel est **non-intègre**.

Le produit des matrices est contre-intuitif à plusieurs niveaux. Il y a quand même des propriétés calculatoires qui le rapprochent du produit de deux nombres :

Proposition
Soit A, B et C des matrices (dont les tailles permettent de réaliser les produits qui apparaissent dans la suite), λ et μ des scalaires.

i. Le produit des matrices est **bilinéaire** :

$$(\lambda A + \mu B)C = \qquad \text{et} \qquad A(\lambda B + \mu C) =$$

ii. Le produit des matrices est **associatif** : $(AB)C =$

iii. La multiplication par une matrice nulle donne une matrice nulle.

Définition
On appelle **matrice identité de taille** n, notée I_n la matrice

Le **symbole de Kronecker** est l'application $\mathbb{N}^2 \to \{0;1\}$ définie par $(i,j) \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, on le note $\delta_{i,j}$.

Avec ce symbole, $I_n =$

Proposition
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a : $AI_p =$ et $I_n A =$

Démonstration
Pour $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, le coefficient en position (i,j) de AI_p est $\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\delta_{k,j} = a_{i,j}$ et donc $AI_p = A$.

De façon analogue, $I_n A = A$. ■

Exercice
Exprimer les matrices élémentaires de $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ à l'aide du symbole de Kronecker.

Réponse
On a $E_{1,1} =$

Mettons en valeur les lignes et les colonnes dans le produit matriciel :

1. Si X est une colonne alors AX est une colonne qui est combinaison linéaire des colonnes de A.

   En effet, si $A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \boxed{A_2} & \dots & \boxed{A_p} \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ alors on a $AX =$

2. Si l'on considère les colonnes de B : $B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & \boxed{B_2} & \dots & \boxed{B_q} \end{pmatrix}$ alors $AB =$

3. On peut adapter les deux remarques précédentes sur les lignes. Par exemple, si A est une ligne alors AB en est également une, qui est combinaison linéaire des lignes de B.

Exercice
Soit A une matrice de taille $(2, 4)$.

a) Par quelle colonne faut-il multiplier A pour que le vecteur colonne obtenu ait comme coefficients les sommes des coefficients des lignes de A ?

b) Par quelle colonne faut-il multiplier A pour obtenir comme résultat la première colonne de A ?

c) Même question pour les autres colonnes de A ?

Réponse
a)

b)

c)

1.3 Transposition

Définition
Soit A une matrice de taille $n \times p$.
On appelle **transposée de** A, notée A^T, la matrice de taille $p \times n$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exemples : $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2+\mathrm{i} & \pi \end{pmatrix}^T =$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^T =$

Remarque : la transposée d'une ligne est une colonne, la transposée d'une colonne est une ligne.

Proposition

i. La tranposition est **linéaire**, autrement dit :

ii. La transposition est **involutive**, autrement dit :

iii. Soit A et B des matrices telles que le produit AB existe. On a $(AB)^T =$

Démonstration
i. et ii. sont évidents. Démontrons iii.
Soit A et B des matrices telles que le produit AB existe ; le produit $B^T A^T$ existe alors aussi.
Si on note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{j,k})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq q}$, pour $(i, k) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; q]\!]$, le coefficient de $B^T A^T$ en position (k, i) est le produit de la $k-$ème ligne de B^T par la $i-$ème colonne de A^T c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{p} b_{j,k} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k}$ soit le coefficient de AB en position (i, k). ■

2 Opérations élémentaires sur les matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Définition
Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On a trois types d'**opérations élémentaires sur les lignes** de A :

— La **permutation** $L_i \leftrightarrow L_j$;

— La **dilatation** $L_i \leftarrow \lambda L_i$;

— La **transvection** $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

De façon symétrique, on dispose des mêmes opérations sur les colonnes, notées :

Une opération élémentaire est donc une application de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si A' est l'image de A par une opération élémentaire, ou par une succession d'opérations élémentaires, on dit que A' est **équivalente** à A et on note $A \sim A'$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En effet,

Proposition
Les opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes sont des applications bijectives. Plus précisément :

$(L_i \leftrightarrow L_j)^{-1} =$; $(L_i \leftarrow \lambda L_i)^{-1} =$; $(L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j)^{-1} =$

Remarque : le vocabulaire tel que défini par le programme peut prêter à confusion. Il ne faut pas confondre les opérations élémentaires (sur les lignes ou sur les colonnes) avec les matrices élémentaires (de la base canonique). Dans la suite, nous nous intéressons à ces matrices.

Exemples : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$\times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$; $\times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$

Proposition (multiplication à gauche ou à droite par une matrice élémentaire)
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :

- $A \times E_{i,j} =$

- $E_{i,j} \times A =$

Remarque : dans la proposition précédente, il faut faire attention à la taille de $E_{i,j}$. Pour pouvoir calculer $A \times E_{i,j}$ il faut que $E_{i,j} \in \mathscr{M}\quad(\mathbb{K})$; pour pouvoir calculer $E_{i,j} \times A$ il faut que $E_{i,j} \in \mathscr{M}\quad(\mathbb{K})$.

Démonstration
On se limite au cas

On a :

Théorème (Opérations élémentaires et produit matriciel)
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dans la suite, i, j désignent des éléments de $[\![1; n]\!]$, λ un scalaire non nul.

Opération élémentaire sur A	Produit matriciel qui produit ce résultat

Démonstration
On se limite à illustrer l'opération élémentaire

Définition
Les matrices qui multiplient A (à gauche ou à droite), s'appellent **matrices de dilation, de permutation, de transvection**.

3 Systèmes linéaires

Définition
On appelle système linéaire à n équations et p inconnues les systèmes de la forme :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

avec tous les coefficients $a_{i,j}$ et les seconds membres b_i qui sont dans $\mathbb{K}$.

Résoudre $(\mathcal{S})$ c'est trouver tous les $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ qui satisfont $\mathcal{S}$.

Exemple : résolvons le système $\begin{cases} x+y+z &= 8 \\ 2x+y-3z &= 1 \end{cases}$.

Proposition

On conserve les notations de la définition.

Soit la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}$ $(\mathbb{K})$ et la colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in$.

Résoudre $(\mathcal{S})$ c'est résoudre l'équation $AX = B$, d'inconnue $X \in$.

Remarque : dans la suite on fera la confusion entre le système $(\mathcal{S})$ et l'équation matricielle $AX = B$.

Définition

a) On dit qu'un système qui admet (au moins) une solution est **compatible**. Dans le cas contraire on dit qu'il est **incompatible**.

b) Si tous les seconds membres sont nuls, on dit que le système est **homogène**.

c) Etant donné le système $AX = B$, son **système homogène associé** est $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarques :

a) un système homogène est compatible car

b) On a vu que AX est une combinaison linéaire des colonnes de A. Le système $AX = B$ est donc compatible si, et seulement si, B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Méthode (Résolution d'un système homogène $AX = 0$)

1. On applique l'algorithme de Gauss, ce qui revient à multiplier à gauche l'équation $AX = 0$ par une suite de k matrices d'opérations élémentaires : $Z_1, \ldots, Z_k$.
2. On obtient $Z_k Z_{k-1} \ldots Z_1 AX = 0$ avec $Z_k Z_{k-1} \ldots Z_1 A$ qui est une matrice **échelonnée réduite**, c'est-à-dire avec le plus grand nombre possible de colonne dont tous les coefficients sont nuls, sauf peut-être un qui vaut 1. Les coefficients non nuls sont les **pivots**.
3. Il y a alors deux cas :
   - Il y a p pivots et alors $AX = 0$ admet une unique solution qui est la solution triviale $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
   - Il y a strictement moins de p pivots et alors il y a une infinité de solutions obtenues en exprimant les **inconnues principales** en fonctions des **paramètres**.

Mise en œuvre : exercices 2, 8 et 9.

Exemples : Résoudre $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = 0$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} X = 0$

Remarque : pour résoudre un système $AX = B$, on procède de la même façon que pour un système homogène (c'est d'ailleurs ce que l'on a fait dans l'exemple introductif).

On obtient $Z_k Z_{k-1} \dots Z_1 AX = Z_k Z_{k-1} \dots Z_1 \times B$ avec la matrice à gauche qui est échelonnée réduite.

y a alors deux possibilités :

- les éventuelles lignes de 0 à gauche correspondent à un 0 à droite et alors le système est compatible ;
- une ligne de 0 à gauche correspond à un coefficient non nul à droite, cela donne une équation absurde et le système est incompatible.

Exemple : résoudre $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Proposition (Structure de l'ensemble des solutions d'un système compatible)
Soit $AX = B$ un système compatible, avec X_0 une de ses solutions.

L'ensemble des solutions du système est :

Démonstration
On a $AX = B \iff$

Remarque : pour un système compatible, on a donc une unique solution X_0 ou bien une infinité de solutions.

4 Calcul dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

4.1 Matrices particulières : triangulaires, diagonales, symétriques et antisymétriques

Définition
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est **diagonale** lorsque :
- On dit que A est **triangulaire supérieure** lorsque :
- On dit que A est **triangulaire inférieure** lorsque :
- On dit que A est **symétrique** lorsque :
- On dit que A est **antisymétrique** lorsque :

Exemples : une matrice diagonale : ; une matrice triangulaire supérieure :

une matrice symétrique : ; une matrice antisymétrique :

4.2 Produit de deux matrices carrées

Si A et B sont deux matrices, AB n'existe que si le nombre de lignes de B vaut le nombre de colonnes de A. Ce produit existe donc toujours dès lors que A et B sont des matrices carrées de même taille.
Autrement dit : dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on peut toujours calculer le produit de deux matrices.

Proposition
i $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit :

ii I_n est l'**élément neutre** pour la multiplication dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

Démonstration
i. est une conséquence immédiate de la définition du produit matriciel. On a déjà vu ii. dans le cas plus général d'une matrice $n \times p$. ■

Définition
Soit A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $r \in \mathbb{N}$. On définit les **puissances de** A par récurrence :

$$A^0 = \qquad \text{et} \quad \forall r \in \mathbb{N},\ A^{r+1} =$$

- AB et BA existent mais sont le plus souvent différents. Lorsque $AB = BA$, on dit que A et B **commutent**.

La formule du binôme a été vue dans le cas des nombres (réels et complexes), elle fonctionne également dans le cas des matrices qui commutent :

Proposition
Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, et soit $r \in \mathbb{N}$. On a :

$$(A+B)^r =$$

Démonstration
En exercice (en faisant bien attention à quel moment il est important que A et B commutent). ■

Exemple : déterminons les puissances de $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On observe que $M = A + 2I_2$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. A et $2I_2$ commutent (car I_2 commute avec toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On a $A^0 = I_2$, $A^1 = A$ et pour $r \geq 2$, $A^r = 0$ (sous-entendu la matrice nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$). Il suit que, pour $r \geq 2$ on a :

$M^r =$

Proposition
Les ensembles des matrices diagonales, triangulaires supérieures et triangulaires inférieures sont stables par produit. Autrement dit, pour des matrices A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

- si A et B sont diagonales alors AB est diagonale ;
- si A et B sont triangulaires supérieures alors AB est triangulaire supérieure ;
- si A et B sont triangulaires inférieures alors AB est triangulaire inférieure.

Démonstration
Pour le cas triangulaire supérieure :

4.3 Matrices inversibles

Remarque : qu'appelle-t-on l'*inverse* d'un nombre x ?

Définition
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **inversible** lorsqu'il existe

Exemples :

a) La matrice nulle est-elle inversible ?

b) Prouver que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible.

Définition
On appelle **groupe linéaire** le sous-ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont inversibles. On le note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Remarques :

a) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas vide car

b) Dans l'introduction de ce chapitre, on a expliqué que l'idée qu'il faut se faire d'un groupe est celle d'un ensemble muni d'une opération tel qu'il existe un élément neutre et tel que chaque élément ait un inverse (ou un opposé, suivant qu'on appelle l'opération une multiplication ou une addition). $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour l'addition des matrices (l'élément neutre pour $+$ est la matrice nulle, chaque matrice a un opposé) ; mais pas pour le produit (il y a un élément neutre : I_n mais certaines matrices n'ont pas d'inverse). $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est la partie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui est un groupe pour le produit.

Proposition

i. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est stable par produit. Autrement dit :

Si A et B sont des matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $(AB)^{-1} =$

ii. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et si $r \in \mathbb{N}$ alors A^r est inversible et $\left(A^r\right)^{-1} =$

Démonstration
Il suffit de

4.4 Calcul d'inverse : cas particulier de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$

On a vu des propriétés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mais une question demeure en supsens : comment savoir si une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ? Ce problème est intimement lié à la résolution des systèmes linéaires ; ce sera l'objet de la fin du chapitre.

Le paragraphe qui suit traite le cas $n = 2$, on y note $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

Définition
On appelle **déterminant** de M, noté $\det(M)$ ou encore $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ le nombre $ad - bc$.

Exemple : $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} =$

Proposition
M est inversible si, et seulement si

L'inverse de M est alors la matrice $M^{-1} =$

Démonstration
Calculons :

4.5 Recherche d'inverse dans le cas général

Dans ce paragraphe, A désigne une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont on cherche à décider l'inversibilité ; X est une colonne de taille n. Toutes les colonnes qu'on considérera seront de taille n.

Lemme
Si A est inversible à droite, alors A est inversible. Autrement dit :

Démonstration
Supposons qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$. Il nous faut montrer que $BA = I_n$; raisonnons en deux étapes : prouvons qu'il existe $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $CA = I_n$ puis, $C = B$.

- Soit $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Considérons l'équation $XA - \alpha I_n = 0_{n,n}$ d'inconnues X et α.
  Il s'agit d'un système linéaire de n^2 équations à $n^2 + 1$ inconnues. Ce système est homogène donc compatible, il a donc une infinité de solutions. Soit $(X_0; \alpha_0)$ une de ses solutions non triviales. Si on avait $\alpha_0 = 0$ alors on aurait $X_0 A = 0_{n,n}$. En multipliant à droite par B il viendrait $X_0 = 0_{n,n}$ ce qui est absurde car on a supposé que $(X_0; \alpha_0)$ est non triviale ; on a donc $\alpha_0 \neq 0$.
  On a : $X_0 A - \alpha_0 I_n = 0_{n,n} \iff X_0 A = \alpha_0 I_n \iff (\frac{1}{\alpha_0} X_0)A = I_n$.
  En prenant $C = \frac{1}{\alpha_0} X_0$ on a bien un inverse à gauche de A.
- Si $CA = I_n$ alors, en multipliant à droite par B on a : $CAB = B \iff C = B$.

Finalement, si $AB = I_n$ alors $BA = I_n$ et donc B est bien l'inverse de A. ■

Théorème
A est inversible si, et seulement si, $AX = B$ a une solution pour toute matrice colonne B.

Démonstration
On procède par double implication.

- Supposons que A soit inversible. Pour toute colonne B, $A^{-1}B$ est solution de $AX = B$.
- Réciproquement, supposons que $AX = B$ a une solution pour toute colonne B.
  On a donc une solution pour $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on l'appelle C_1 et on a $AC_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
  De façon analogue, soit C_2 une solution de $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. On procède ainsi jusqu'à créer C_n et on considère la matrice B dont les colonnes sont $(C_1 C_2 \dots C_n)$.
  Les colonnes de $AB = A(C_1 \dots C_n)$ sont donc celles de I_n et donc B est l'inverse à droite de A. D'après le lemme, B est donc l'inverse de A qui est bien inversible.

On vient de voir que A est inversible si, et seulement si, pour toute colonne B, $AX = B$ admet une unique solution et que cette solution est alors $A^{-1}B$. On va utiliser cela pour trouver A^{-1} :

Méthode (Pour déterminer l'inverse d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$)
1. On applique l'algorithme de résolution à $AX = B$ avec $B = (b_i)$.
2. On obtient $Z_k \dots Z_1 AX = Z_k \dots Z_1 B$ avec $Z_k \dots Z_1 A$ qui est échelonnée et réduite, notons-la A'.
3. Il y a alors deux possibilités :
   — Si $A' = I_n$ alors A est inversible, le système $AX = B$ a pour solution $X = Z_k \dots Z_1 B$ et on obtient A^{-1} en lisant les coefficients du second membre ;
   — sinon, A n'est pas inversible.

Mise en œuvre : exercices 3, 7.

Exemple : Appliquons la méthode d'inversion à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix} \qquad (L_2 \leftrightarrow L_3)$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} b_1 - b_3 \\ b_3 \\ b_1 + b_2 - b_3 \end{pmatrix} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} b_1 - b_3 \\ b_3 \\ b_1 + b_2 - b_3 \end{pmatrix} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$$

On en déduit que le système $AX = B$ a toujours une solution, donc A est inversible.
De plus, sa solution est $A^{-1}B = \begin{pmatrix} b_1 - b_3 \\ b_3 \\ b_1 + b_2 - b_3 \end{pmatrix}$ donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque : on peut reformuler la méthode précédente, en mettant en avant les opérations élémentaires plutôt que la résolution d'un système :

Méthode (Pour décider si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et, le cas échéant, déterminer A^{-1})

1. On considère la matrice augmentée $(A|I_n)$;
2. On applique à cette matrice augmentée l'algorithme de Gauss qui échelonne et réduit A en A', on obtient alors : $(A'|E)$ et il y a deux possibilités :
   — si $A' \neq I_n$ alors A n'est pas inversible ;
   — si $A' = I_n$ alors E est l'inverse de A.

Mise en œuvre : exercices 3, 7.

Remarque : E est le produit des matrices d'opérations élémentaires qui ont été introduites au paragraphe 2.

Exercice
Appliquer la méthode précédente à la matrice A de l'exemple précédent.