Chapitre 2 : calculer dans $\mathbb{C}$

Notations : dans ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 Généralités sur les complexes

1.1 Forme algébrique

Définition

- On note i un nombre, non réel, qui vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.
- On appelle **nombres complexes** les nombres de la forme $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b des réels. On dit alors que a est la **partie réelle** de z et que b est sa **partie imaginaire** ; on les note respectivement $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.
- Pour un complexe z, l'écriture $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$ s'appelle la **forme algébrique de** z, cette écriture de z est unique.

Exemples :

Remarques :

a) Tout réel x est un nombre complexe :

Une différence importante avec $\mathbb{R}$: il n'y a **pas de relation d'ordre** dans $\mathbb{C}$.

b) ⚠ une partie imaginaire est un nombre réel.

c) L'unicité de la forme algébrique signifie que, si z et z' sont deux complexes on a :

$$\big(z = z'\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')\big)$$

Méthode (Pour montrer que deux complexes z et z' sont égaux)

Mise en œuvre : exercices 1 et 7.

Remarque : il y a une correspondance **bijective** entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire :

On connait d'autres correspondances bijectives entre $\mathbb{R}^2$ et des ensembles : lesquelles ?

Définition

Soit z un complexe.

i. On dit que le point M du plan de coordonnées $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ est l'**image** de z dans le plan ; réciproquement, on dit que z est l'**affixe** du point M et on notera $M(z)$.

ii. De façon analogue, on dit que z est l'**affixe** du vecteur $\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z) \\ \mathrm{Im}(z)) \end{pmatrix}$.

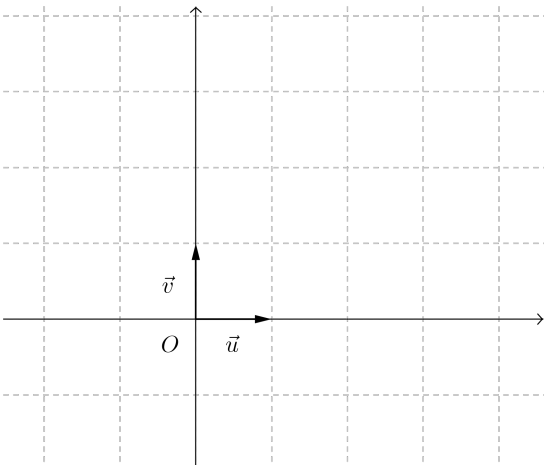
Exemples :

— Représenter les points $A(2+3\mathrm{i})$ et $B(3-\mathrm{i})$.

— Que des dire des complexes dont l'image est sur l'axe des ordonnées ?

— Où sont situées les images des complexes réels ?

— Représenter $\Gamma = \{M(z)/\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)\}$.



Remarque : le plan nous permet donc de représenter $\mathbb{C}$. On parle de **plan complexe**.

Définition

Soit $z = a + ib$ un complexe sous forme algébrique, $M(z)$ son image dans le plan complexe.

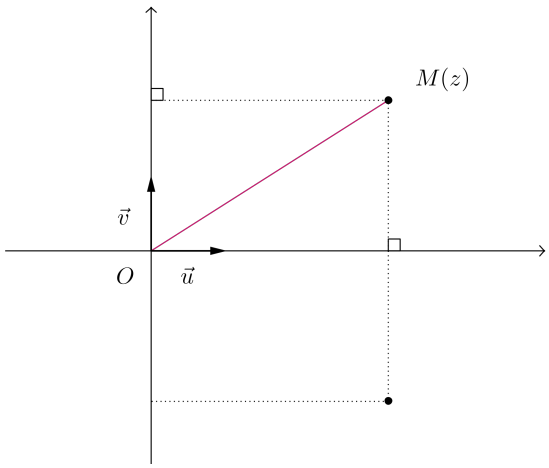
i. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par :

ii. Graphiquement, l'image de $\overline{z}$ dans le plan complexe est

iii. On appelle **module** de z, et on note $|z|$, la distance OM, c'est-à-dire la norme de $\overrightarrow{OM}$.

On a :

iv. Si $z \neq 0$, un **argument** de z désigne une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



⚠ 0 n'a pas d'argument.

Remarque : pour un complexe non nul z, l'argument de z est défini à un multiple de 2π près (il en existe une infinité). Parmi les arguments de z, on appelle **argument principal** celui qui est dans $]-\pi;\pi]$, on le note $\mathrm{Arg}(z)$.

Proposition

Soit z un complexe.

a) $|\overline{z}| = |z|$.

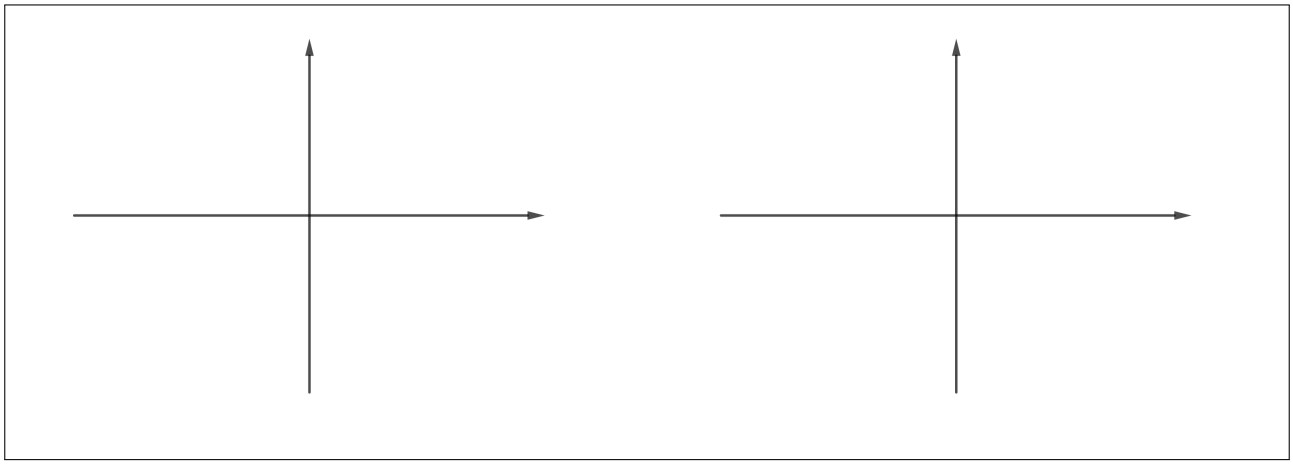
b) Si $z \notin \mathbb{R}^-$, $\mathrm{Arg}(\overline{z}) = -\mathrm{Arg}(z)$.

Démonstration

Ces deux résultats sont une conséquence directe des définitions géométriques de la conjugaison, du module et de l'agument. Par exemple, pour a) :

Remarque : pour b) on a du préciser $z \notin \mathbb{R}^-$ car

Exercice
Dans le plan complexe, représenter $\Lambda = \{M(z)/1 < |z| \leq 2\}$ et $\Pi = \{M(z)/\text{Arg}(z) \in [0; \frac{\pi}{6}]\}$.



1.2 Opérations dans $\mathbb{C}$

Proposition
L'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$ se prolongent *naturellement* à $\mathbb{C}$. Ainsi, pour tous complexes z et z' de formes algébriques $z = a + \text{i}b$ et $z' = c + \text{i}d$ on a :

- $z + z' =$
- $zz' =$

Exemples :

1. $(3 + 2\text{i})^2 =$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(3 + \text{i})z - 2\text{i} = 3z - 1$.

Proposition
Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points du plan complexe. La distance AB vaut $|z_B - z_A|$.

Démonstration
soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan.

D'une part, la distance AB vaut :

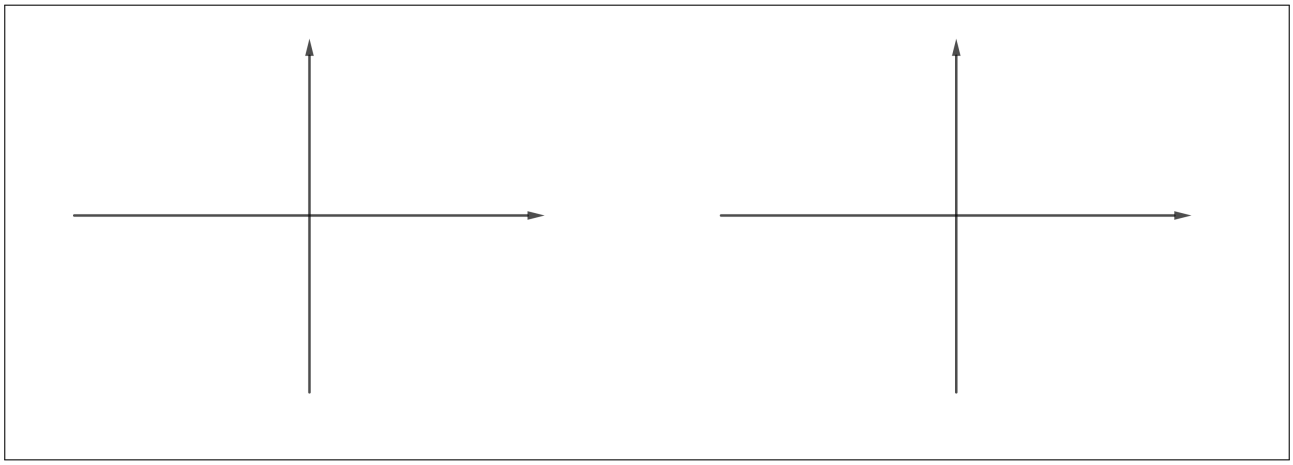
D'autre part, les coordonnées cartésiennes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

On en déduit que l'affixe complexe de ce vecteur est :

Soit, en faisant apparaître les affixes de A et B :

Finalement,

Exercice
Dans le plan complexe, représenter $\Sigma = \{M(z)/|z-1-\mathrm{i}| = 1\}$ et $\Theta = \{M(z)/|z+2\mathrm{i}+1| < 1\}$.



1.3 Propriétés du module et de l'argument

Proposition
Soit z un complexe. On a $z\overline{z} = |z|^2$.

Démonstration
Soit $z \in \mathbb{C}$.

Remarque : en particulier, pour tout complexe z, le nombre $z\overline{z}$ est un réel (positif). Cela permet de trouver la forme algébrique de l'inverse d'un complexe non nul, ou d'une fraction.

Méthode (Pour trouver la forme algébrique d'une fraction)

Mise en œuvre : exercice 2.

Exemple : Montrer que $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ est imaginaire pur.

Proposition (Propriétés de la conjugaison)
Soit z et z' deux complexes. On a :

a) $\overline{\overline{z}} =$; $z + \overline{z} =$; $z - \overline{z} =$

b) La conjugaison est compatible avec les opérations :

$\overline{z+z'} =$; $\overline{z \times z'} =$ et, si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} =$

Proposition (Le module est compatible avec la multiplication et la division)
Soit z et z' deux complexes. On a :

a) $|zz'| =$ b) Si $z' \neq 0$, $|\frac{z}{z'}| =$ c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z^n| =$

Démonstration
On se limite au produit.

Remarque : Le module n'est pas compatible avec l'addition et la soustraction :

Proposition (Inégalité triangulaire)
Soit z et z' deux complexes. On a : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Démonstration
Soit z et z' deux complexes. On va raisonner par équivalences :

$$(\star) \ : \ |z+z'| \leq |z| + |z'| \iff |z+z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2 \quad \text{(possible car } \quad \text{)}$$

$$\iff (z+z')\overline{(z+z')} \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'|$$

$$\iff z\overline{z'} + \overline{z}z' \leq 2|z||z'|$$

Or, $z\overline{z'} + \overline{z}z' = 2\text{Re}(z\overline{z'})$ d'où : $(\star) \iff \text{Re}(z\overline{z'}) \leq |z||z'|$.

On a $|z||z'| = |z||\overline{z'}| = |z\overline{z'}|$; la dernière inégalité devient $\text{Re}(z\overline{z'}) \leq |z\overline{z'}|$ qui est toujours vraie.

Par équivalences, l'inégalité triangulaire est donc démontrée.

Remarque : le cas d'égalité se produit lorsque z et z' ont le même argument principal. Dans la démonstration, cela revient à avoir $\text{Re}(z\overline{z'}) = |z\overline{z'}|$ qui se produit si, et seulement si, $z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+$. Nous verrons plus loin dans ce chapitre que l'argument d'un produit est la somme des arguments et on pourra conclure.

2 Nombres complexes de module 1

2.1 Ensemble $\mathbb{U}$

Définition
On appelle $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes dont le module est 1.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$$

Exemples :

1. $|1 + 2\text{i}| = \sqrt{5} \neq 1$ donc $1 + 2\text{i} \notin \mathbb{U}$.
2. $\in \mathbb{U}$, $\in \mathbb{U}$, $\in \mathbb{U}$, $\in \mathbb{U}$.
3. $j = \frac{-1+\text{i}\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{U}$. En effet,

Géométriquement, $\mathbb{U}$ correspond

qui est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont de la forme

Proposition
Soit $z \in \mathbb{U}$, $M(z)$ son image dans le plan complexe.
- Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$.
- θ est **un argument** de z, c'est une mesure de $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$.
- Si l'on rajoute la condition $\theta \in]-\pi;\pi]$ alors θ devient unique, c'est **l'argument principal** de z, on le note $\mathrm{Arg}(z)$.

Exemples :
- $1 = 1 + 0\mathrm{i} = \cos(0) + \sin(0)\mathrm{i}$ et donc $\mathrm{Arg}(1) =$.
- $\mathrm{Arg}(\mathrm{i}) =$; $\mathrm{Arg}(-1) =$; $\mathrm{Arg}(-\mathrm{i}) =$.
- $j =$ donc $\mathrm{Arg}(j) =$.

Proposition
$\mathbb{U}$ est stable par produit :

Démonstration
Soit

Exercice
Montrer que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{U} \\ \theta & \mapsto & \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta) \end{array} \right.$ vérifie : $\forall (\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2,\ f(\theta) \times f(\phi) = f(\theta + \phi)$.

Réponse
.

Cette **propriété fonctionnelle** est celle de

Définition
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle **exponentielle** de $\mathrm{i}\theta$ le nombre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} =$

Les propriétés calculatoires de exp découlant de sa propriété fonctionnelle, l'exponentielle complexe possède les mêmes :

Proposition
Soit $(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$ et soit $n \in \mathbb{Z}$. On a :

a) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} =$ b) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} =$ c) $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n =$ d) $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} =$

Remarque : la preuve est laissée en exercice. *(C'est sans difficulté mais formateur pour la rédaction).*

2.2 Formules d'Euler et de Moivre

Proposition (Formules d'Euler)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration
Par exemple, pour

Proposition (Formule de Moivre)
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \iff \boxed{(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

2.3 Application : linéarisation d'expressions trigonométriques

Il s'agit de tranformer une expression de la forme $\cos^n(x)$ (ou $\sin^n x$) en une somme de $\cos(kx)$ et de $\sin(kx)$.

Méthode (Linéariser une expression trigonométrique)
1. on utilise la formule d'Euler pour exprimer l'expression trigonométrique à l'aide de l'exponentielle complexe ;
2. on développe la puissance (grâce à la formule du binôme de Newton) ;
3. on utilise les propriétés de l'exponentielle puis on regroupe les termes « qui se ressemblent » ;
4. on utilise Euler faire apparaître des expressions trigonométriques à la place des exponentielles complexes.

Mise en œuvre : exercice 3.

Exemple : Pour $x \in \mathbb{R}$, linéarisons $\cos^3 x$.

Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \cos(x)^3 = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)}$.

⚠ s'il reste un i à la fin, il y a une erreur car

Remarque : on peut faire le "contraire" d'une linéarisation. Par exemple, exprimons $\sin(3x)$ en fonction de puissances de $\cos x$ et $\sin x$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(3x) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})$$

3 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Théorème
Soit z un complexe non nul.
z peut être écrit de façon unique sous la forme $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi;\pi]$.
Cette expression est la **forme exponentielle** du complexe z.
On a alors : $r = |z|$ et $\theta = \mathrm{Arg}(z)$.

Démonstration
Soit $z \in \mathbb{C}^*$.
Le complexe $\dfrac{z}{|z|}$ a pour module 1. Donc, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \iff z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
L'unicité tient à l'unicité du module ainsi qu'à l'unicité de l'argument principal. ■

Remarque : en pratique, si r, ρ, θ et ϕ sont des réels (avec r et ρ strictement positifs) alors

$$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \iff \begin{cases} \rho = r \\ \theta = \phi + k2\pi \text{ (avec un certain } k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Méthode (Prouver l'égalité de deux complexes non nuls avec la forme exponentielle)
On vérifie qu'ils ont même module et que leurs arguments correspondent au même angle, c'est-à-dire qu'ils sont congrus modulo 2π.

Cela signifie que deux complexes z et z' sont égaux si, et seulement si, leurs modules et leurs arguments principaux sont égaux.

Méthode (Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle)
- si l'argument principal est évident, il ne reste qu'à calculer le module.
- Sinon,
  1. on calcule le module de z ;
  2. on factorise la forme algébrique de z par $|z|$;
  3. on identifie $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ (avec $\theta = \mathrm{Arg}(z)$) ;
  4. si θ est un angle remarquable on donne sa valeur exacte.
  5. La forme exponentielle de z est $|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Mise en œuvre : exercices 4, 8 et 9.

Exemples :

1. Donner la forme exponentielle de $1 + \mathrm{i}$.

2. Donner la forme exponentielle de $z = -\sqrt{3}\mathrm{i} + 1$.

3. Donner la forme exponentielle de $z = -3 - 7\mathrm{i}$.

Remarques :

1. L'écriture intermédiaire $z = |z|(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ est la **forme trigonométrique** de z.
2. Il est facile de passer de la forme exponentielle à la forme algébrique. Par exemple :

$$6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} =$$

Proposition (Propriétés des arguments)
Soit z et z' deux complexes non nuls. On a :

a) $\mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) =$ b) $\mathrm{Arg}(zz') =$ c) $\mathrm{Arg}\left(\frac{z}{z'}\right) =$

Démonstration
Pour chaque point, il s'agit d'exploiter l'unicité de la forme exponentielle d'un complexe. Par exemple pour a) :

Remarque : il y a une (petite) erreur dans l'énoncé de la propriété. En effet,

Méthode (Factoriser $\cos(a) \pm \cos(b)$ ou $\sin(a) \pm \sin(b)$ avec l'angle moitié)

1. on écrit la quantité étudiée comme la partie réelle (ou imaginaire) d'une somme d'exponentielles complexes ;
2. on fait intervenir l'angle moitié $\frac{a+b}{2}$ et on écrit $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ et $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$;
3. on factorise par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$;
4. on utilise la formule d'Euler pour la parenthèse ;
5. on conclut.

Mise en œuvre : exercices 8 et 9.

Exemple : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Transformons $\cos(a) + \cos(b)$ avec la technique de l'angle moitié.