classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Maison $n°3$

PSI
MATHEMATIQUES
à rendre le vendredi 17 Octobre 2025

Sujet Mines/Centrale

Exercice I

1. Soient f continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ telle que : $0 < a < b$.
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f(\varepsilon x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge et que :
   $$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.
3. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Problème

Une propriété sur les sommes de Riemann

Dans toute la suite, pour tous réels $a < b$, on note $\mathcal{D}_{a,b}$ l'ensemble des fonctions $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur l'intervalle $]a,b[$, intégrables sur $]a,b[$ et vérifiant de plus :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$$

1 ▷ Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Démontrer que la restriction g de la fonction f à l'intervalle $]a,b[$ appartient à l'ensemble $\mathcal{D}_{a,b}$.

2 ▷ En posant pour tout entier $k \geqslant 1$, $a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{2^{k+1}}$ et $b_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{2^{k+1}}$, montrer que l'on peut choisir un entier $k_0 \geqslant 1$ tel que :

$$\forall k \geqslant k_0, b_{k+1} < a_k.$$

En déduire que la fonction $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f : t \longmapsto \begin{cases} k^2.2^{k+1}.(t-a_k)\,, \text{ si il existe un entier } k \geqslant k_0 \text{ tel que } t \in \left[a_k, a_k+\frac{1}{2^{k+1}}\right] \\ k^2.2^{k+1}.(b_k-t)\,, \text{ si il existe un entier } k \geqslant k_0 \text{ tel que } t \in \left[a_k+\frac{1}{2^{k+1}}, b_k\right] \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

est une fonction bien définie et continue sur $]0,1[$, intégrable sur $]0,1[$ et que cette fonction f n'appartient pas à l'ensemble $\mathcal{D}_{0,1}$.

Dans la suite, on définit la fonction : $h : \begin{cases}]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}. \end{cases}$

3 ▷ Montrer que la fonction $\varphi : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1[$, puis montrer que la fonction φ appartient à $\mathcal{D}_{0,1}$.

4 ▷ On note $\tilde{h}$ la restriction de la fonction h à l'intervalle $\left]0,\frac{1}{2}\right]$. Vérifier que la fonction $\tilde{h}$ est décroissante sur $\left]0,\frac{1}{2}\right[$, puis montrer que la fonction $\tilde{h}$ appartient à $\mathcal{D}_{0,\frac{1}{2}}$.

5 ▷ Montrer que la fonction h est intégrable sur $]0,1[$ et que :

$$\int_0^1 h(t)dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \tilde{h}(t)dt.$$

6 ▷ Prouver alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \int_0^1 h(t)dt.$$

7 ▷ Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)dt.$$

En déduire que :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \int_0^1 h(t)dt.$$

8 ▷ Déduire des questions précédentes que la fonction h appartient à $\mathcal{D}_{0,1}$.

9 ▷ Montrer que :

$$\int_0^1 h(t)dt = \pi$$

10 ▷ Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, on a un équivalent de la forme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n}$$

où la constante λ est à préciser.

11 ▷ En déduire la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}$$

On considère une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres réels strictement supérieurs à -1 convergente de limite nulle.

12 ▷ Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} = 0.$$

13 ▷ En déduire que : :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \cdot \left(\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - 1\right) = 0.$$