classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Surveillé $n°4$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 29 Novembre 2025
Durée : 4 heures
Sujet Type CCINP/E3A

— L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique ou document est interdit.
— L'énoncé de cette épreuve comporte 3 pages de texte et trois exercices indépendants.
— Le candidat est prié de numéroter ses copies.
— Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
— Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Exercice I

, On considère l'application T définie par :

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], T(P) = (3X+8)P + (X^2-5X)P' - (X^3-X^2)P''$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
2. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(X^n) = a_n X^{n+1} + b_n X^n$ où a_n et b_n est un produit de deux facteurs à déterminer.
3. Montrer que $\mathbb{C}_3[X]$ est stable par T.
4. On note T_3 l'endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$ induit par T.
   (a) Donner la matrice A de T_3 dans la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$.
   (b) Donner les éléments propres de T_3.
   (c) Vérifier que la famille obtenue en réunissant les bases de chaque sous espace propres de T_3 est une base de $\mathbb{C}_3[X]$.
   (d) En déduire que A est semblable à une matrice diagonale D que l'on déterminera.
   (e) On pose $\text{Com}(A) = \{M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C}) / AM = MA\}$.
      i. Vérifier que $\text{Com}(A)$ est un sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$.
      ii. Soit $M \in \text{Com}(A)$. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$ associé à M dans la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$.
         A. Montrer que u et T_3 commutent.
         B. Montrer que pour toute valeur propre λ de T_3, $E_\lambda(T_3)$ est stable par u.
         C. En déduire une base de $\mathbb{C}_3[X]$ dans laquelle la matrice de u est diagonale : On note cette matrice Δ .
         D. Montrer que $AM = MA \iff D\Delta = \Delta D$.
         E. En déduire une base de $\text{Com}(A)$.
5. En utilisant la question 2, montrer que si P est un vecteur propre de T, alors P est de degré égal à 3.
6. Quels sont alors les éléments propres de T ?
7. T est-il injectif ?
8. T est-il surjectif ? *Observer le degré de $T(P)$ en fonction du degré de P.*

Exercice II

Les deux parties sont indépendantes entre elles.

Partie I : Etude de $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}, n \in \mathbb{N}$

1. (a) Rappeler l'énoncé du théorème permettant de montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^p}{p}$ est convergente, où $p \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Rappeler l'énoncé du théorème permettant d'écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

   (c) De quel signe est R_n ?

   (d) En écrivant $\frac{1}{p} = \int_0^1 t^{p-1}\,\mathrm{d}t$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$$

2. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} R_n$ est une série alternée convergente.

3. Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$.

Partie II : Etude de $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}, n \in \mathbb{N}$

1. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*, U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$.

   (a) Montrer que la suite $\left(U_n - \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx\right)$ est décroissante et minorée.

   (b) Montrer qu'il existe un réel L tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(U_n - \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}} dx\right) = L + 2$$

   (c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} U_n - 2\sqrt{n} - L = 0$.

   (d) Soit θ un réel strictement supérieur à 1.

      i. Justifier l'existence de $\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta}, n \in \mathbb{N}$.

      ii. Établir que :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^\theta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\theta-1)n^{\theta-1}}$$

   Indication : Utiliser la technique de comparaison série-intégrale en s'aidant de la monotonie de $t \longmapsto \frac{1}{t^\theta}$

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*, v_n = U_n - 2\sqrt{n} - L$.

   (a) Donner la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$.

   (b) Montrer, si $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont deux séries à termes positifs convergentes telles que $x_n \sim y_n$ alors,

$$\sum_{p=n}^{\infty} x_p \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=n}^{\infty} y_p$$

   On rappelle que $x_n \sim y_n \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |x_n - y_n| \leq \varepsilon |y_n|$

(c) En déduire $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

3. En procédant de manière analogue à 2 avec la suite $\left(v_n - \dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right)$, montrer que

$$v_n - \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{24n^{\frac{3}{2}}}$$

4. En déduire que U_n est de la forme :

$$U_n = A\sqrt{n} + B + \frac{C}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

5. (a) Montrer qu'il existe un réel S tel que $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} = S$.

(b) Montrer que $r_{2n} = S - \sqrt{2}U_n + U_{2n}$.

(c) En déduire qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera, tels que :

$$r_{2n} = a + \frac{b}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

(d) Exprimer S en fonction de L.

(e) Montrer que $r_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.

(f) Déterminer la nature de la série de terme général r_n.

Exercice III

Pour tout entier naturel n, on note e_n : $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^n e^{-x}$.
Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et E le sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ défini par $E = \text{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_N)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_N)$ est une base de E. En déduire la dimension de E.
2. Pour tout élément g de E, on note $\Delta(g) = g'$.
   (a) Démontrer que $\Delta \in \mathcal{L}(E)$.
   (b) Écrire la matrice A de Δ dans la base $\mathcal{B}$. Δ est-il un automorphisme de E ?
   (c) Déterminer les éléments propres de Δ.
3. Soient $k \in [|0, N|]$ et $x \geq 0$. Montrer que la série de terme général $w_n = e_k(x+n)$ est convergente.
4. (a) Pour tout entier naturel k, on considère une suite $(u_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_{n,k}$ converge.

   Citer le théorème du cours qui justifie que l'on a (pour tout $N \in \mathbb{N}$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{N} u_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,k}\right)$$

   (b) Soit $f \in E$. Démontrer que la série de terme général $u_n = f(n+x)$ est convergente pour tout $x \geq 0$. On note alors

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+x)$$

   (c) Justifier que la série de terme général $n^j e^{-n}$ pour tout j fixé de $\mathbb{N}$ est convergente. On note alors

$$A_j = \sum_{n=0}^{+\infty} n^j e^{-n}$$

   (d) Exprimer $F(x)$ en fonction des A_j pour tout $x \geq 0$.
   (e) En déduire que $F \in E$ et que l'application Φ : $f \mapsto F$ ainsi définie est un endomorphisme de E.
5. Écrire la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$ en fonction des A_j. Donner le spectre de Φ .