classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Surveillé $n°4$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 29 Novembre 2025
Durée : 4 heures
Sujet Type Mines

— L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.
— L'énoncé de cette épreuve comporte 3 pages de texte, deux exercices et un problème.
— Le candidat est prié de numéroter ses copies.
— Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
— Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Exercice I

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels positifs, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.
On rappelle que :

— $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant p, |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$.
— $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$

1. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge.
   (a) Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right)$.
   (b) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, montrer que $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$.
2. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ diverge.
   (a) Si $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_k = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.
   (b) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, montrer que $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.
3. Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n\, e^{-u_n}$.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   (b) Déterminer la limite de $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ et en déduire un équivalent de u_n.

Exercice II

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Justifier l'existence de R_n.
2. Justifier que $\sum_{n\geqslant 0} R_n$ est une série alternée.
3. Montrer que $R_n = R_{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$ et $R_n + R_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}$.
4. Justifier que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
5. En déduire un équivalent de R_n et la nature de $\sum_{n\geqslant 0} R_n$.

Problème : Matrices semblables à leur inverse

On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_n$ désigne l'algèbre des matrices carrées complexes de taille n et $\mathcal{GL}_n$ le groupe des matrices complexes inversibles de taille n.

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n$ sont **semblables** si

$$\exists P \in \mathcal{GL}_n, \quad A = P^{-1}BP.$$

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n$ le **polynôme caractéristique** de A est défini par $\chi_A = \det(XI_n - A)$.

Partie 1. Polynômes réciproques.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré p est dit **réciproque** lorsqu'il satisfait l'égalité

$$P(X) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right).$$

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré p. On écrit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, où $a_0, \dots a_p$ sont des nombres complexes, et $a_p \neq 0$.
   Montrer que P est réciproque si et seulement si pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant p$, on a l'égalité

   $$a_k = a_{p-k}$$

   En déduire que $P(0) \neq 0$.
2. Soit P un polynôme de degré p écrit sous forme factorisée,

   $$P = a_p \prod_{i=1}^{d} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

   où $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont les racines complexes distinctes de P et $m_1, \dots, m_d$ leurs multiplicités.
   Écrire sous forme factorisée le polynôme $X^p P(\frac{1}{X})$ et démontrer que si P est réciproque alors pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant d$, λ_i est non nul et $\frac{1}{\lambda_i}$ est racine de P avec la multiplicité m_i.
3. Soit Q un polynôme de degré p. On dit que Q est **antiréciproque** si

   $$Q(X) = -X^p Q\left(\frac{1}{X}\right)$$

   Montrer que si Q est antiréciproque, 1 est une racine de Q et qu'il existe un polynôme P constant ou réciproque tel que $Q = (X-1)P$

Soit R un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ ayant la propriété suivante :

Toute racine a de R est non nulle et $\frac{1}{a}$ est racine de R de même multiplicité que a.

4 Démontrer que le produit des racines de R, comptées avec multiplicités, ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1. On pourra remarquer que l'égalité $a = \frac{1}{a}$ n'a lieu que pour $a = 1$ ou $a = -1$.

5 En déduire que R est réciproque ou antiréciproque.

Partie 2. Cas particulier

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{GL}_n$.

6 Soit x un nombre réel non nul. Exprimer $\det(xI_n - A)$ en fonction de x, $\det A$ et $\det(\frac{1}{x}I_n - A^{-1})$.

7 On suppose dans cette question que A est semblable à son inverse.

(a) Préciser les valeurs que peut prendre le déterminant de A,

(b) en déduire que χ_A est soit réciproque, soit antiréciproque.

(c) Justifier que $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \dim(\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_n)) = \dim(\mathrm{Ker}\,(A^{-1} - \lambda I_n))$.

8 Soit $B \in \mathscr{M}_n$ une matrice semblable à une matrice diagonale D dont la diagonale est $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$.
On suppose que le polynôme caractéristique de B est réciproque ou antiréciproque.
Démontrer que B est inversible et semblable à son inverse.

9 (a) Montrer que le polynôme caractéristique de matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est réciproque.

(b) Montrer que B n'est pas semblable à son inverse . On pourra déterminer les espaces propres de B et B^{-1} pour la valeur propre 2.

(c) Qu'en déduit-on par rapport à la question précédente ?