classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Surveillé $n°5$

PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 10 Janvier 2026
Durée : 4 heures
Sujet Type Mines/Centrale

- L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique ou document est interdit.
- L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages et deux problèmes indépendants.
- Le candidat est prié de numéroter ses copies.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Problème I

Soit n un entier naturel $\geqslant 2$.
On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, de dimension n, muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ et $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
L'endomorphisme identité de E est noté e. On note I_n sa matrice dans n'importe quelle base de E.
Pour $y \in E$: $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, on note $||y||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i|$.
Enfin, si $f \in L(E)$, $sp(f)$ est l'ensemble de ses valeurs propres.

Partie 1 : Préliminaire

Soit u un endomorphisme de E et $U = (u_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ sa matrice dans la base B.
Dans cette partie U n'est pas inversible.

Q 1. Justifier l'existence d'un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = 0$.

Q 2. Prouver qu'il existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que $|u_{i,i}| \times ||x||_\infty \leqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |u_{i,j}| \times |x_j|$.

Q 3. En déduire qu'il existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que $|u_{i,i}| \leqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |u_{i,j}|$.

Q 4. La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Partie 2.

Soit f l'endomorphisme de E représenté dans la base B par la matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ telle que $M = (m_{i,j})$ où :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \forall j \in \{1, ..., n\}, \quad m_{i,j} = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{si} \quad |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le but de cette partie est de calculer les éléments propres de M sans utiliser son polynôme caractéristique.

Question 1

1.1 Justifier que les valeurs propres de M sont réelles et que la matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. M se décompose sous la forme : $M = -2I_n + T$ et g désigne l'endomorphisme de E associé à la matrice $T = (t_{i,j})$.

1.2 Prouver l'équivalence : $(\lambda \in sp(f)) \Leftrightarrow (\lambda + 2 \in sp(g))$.
Comparer alors les sous-espaces $Ker(f - \lambda e)$ et $Ker\,(g - (\lambda + 2)e)$.

Recherche des valeurs propres de T.

Question 2

Soit μ une valeur propre de T.

2.1 Montrer qu'il existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que $|t_{i,i} - \mu| \leqslant \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |t_{i,j}|$.

2.2 En déduire que $|\mu| \leqslant 2$.
Justifier alors l'existence d'un réel $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\mu = 2\cos\alpha$.

Question 3

La question consiste à rechercher un $\alpha \in [0, \pi]$ et une suite complexe $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que : $\left\{ \begin{array}{c} x_0 = 0 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad x_{k-1} - 2x_k\cos\alpha + x_{k+1} = 0 \end{array} \right.$

3.1 A quelle condition le vecteur représenté dans la base B par $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de T pour la valeur propre $\mu = 2\cos\alpha$?

Dans la suite, cette condition est vérifiée

3.2 Prouver que $\alpha \in]0, \pi[$.

3.3 Montrer l'existence de deux nombres complexes c_1 et c_2 tels que :

$$\forall k \in \{1, 2, .., n\}, \quad x_k = c_1 e^{ik\alpha} + c_2 e^{-ik\alpha}$$

(i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$).

3.4 En déduire les valeurs possibles pour α : $\alpha_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$, $\quad 1 \leqslant j \leqslant n$.

3.5 Déterminer les valeurs propres de T.
Donner une base de vecteurs propres de T.

Question 4 : Valeurs propres de M :

Prouver que les valeurs propres de M sont les $\lambda_j = -4\sin^2\dfrac{j\pi}{2(n+1)}$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et que les sous-espaces propres associés E_{λ_j} sont de dimension 1.
Donner une base de chaque E_{λ_j}.

Problème 2

Notations

Dans ce problème, on introduit la notion de produit infini et on l'utilise pour obtenir diverses propriétés. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de t.
Soit $p \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geqslant p}$ une suite de nombres réels. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant p$,

$$P_n = \prod_{k=p}^{n} u_k.$$

On dit que la suite $(P_n)_{n\geqslant p}$ est la suite des produits partiels du produit infini $\displaystyle\prod_{n\geqslant p} u_n$.
Si la suite $(P_n)_{n\geqslant p}$ converge, on dit que sa limite est la valeur du produit infini et on pose :

$$\prod_{k=p}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} P_n.$$

I Résultats préliminaires

I.A – Soit $n \in \mathbb{N}^\star$

Q 1. Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

Q 2. Montrer que, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in [-1, +\infty[^n$,

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right).$$

I.B – Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Le but de cette sous-partie est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers e^z.

Q 3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{C}$,

$$|(1+t) - \mathrm{e}^t| \leqslant |t|^2 \mathrm{e}^{|t|}$$

On écrira e^t comme somme d'une série

Q 4. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $M = \max\{|a|, |b|\}$.
Montrer que $|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}|a-b|$.

Q 5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leqslant \frac{|z|^2}{n}\mathrm{e}^{|z|}$.

Q 6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers e^z.

II Etude d'une fonction définie par un produit infini

On considère dans cette partie :
— a et b deux réels tels que $a < b$ et le segment $\mathcal{S} = [a,b]$.
— $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur $\mathcal{S}$ à valeurs dans $]-1, +\infty[$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathcal{S}$:

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+f_k(x)), \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(x)|), \quad \text{et sous conditions d'existence } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}|f_k(x)|.$$

On rappelle que toute fonction continue sur un segment est bornée

II.A – On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions continues sur $\mathcal{S}$ et que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}|f_n|$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction R_0.

Q 7. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leqslant \mathrm{e}^M |f_{n+1}(x)|.$$

On devra montrer que R_0 est continue sur $\mathcal{S}$

Q 8. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leqslant Q_{n+1}(x) - Q_n(x).$$

Q 9. En déduire que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction P définie sur $\mathcal{S}$ par :

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n(x)) \end{cases}$$

Q 10. Montrer que la fonction P est continue et ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

II.B – Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $f(x) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - e^{-nx^2}\right)$.

Q 11. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Q 12. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^\star$ puis calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

II.C – On suppose dans cette sous-partie que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ telle que :
— la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}|f_n]$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.
— la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}\frac{f_n'}{1+f_n}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$.

Q 13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathcal{S}$,

$$P_n'(x) = P_n(x)\sum_{k=1}^{n}\frac{f_k'(x)}{1+f_k(x)}.$$

Q 14. En déduire que la fonction

$$P : \begin{cases} \mathcal{S} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n(x)) \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ et que

$$\forall x \in \mathcal{S},\ \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}$$

III Expression de la fonction sinus comme produit infini

III.A – Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1-\frac{iX}{2n+1}\right)^{2n+1}\right).$$

Dans les questions Q20 à Q23, on fixe un entier naturel n.

Q 15. Montrer que P_n est un polynôme de degré $2n+1$.

Q 16. Pour tout $\in [\![0, 2n]\!]$, on note $x_k = (2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$. Montrer que l'ensemble des racines de P_n est $\{x_k \mid k \in [\![0, 2n]\!]\}$.

Q 17. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$P_n(X) = \lambda X \prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{x_j^2}\right).$$

Q 18. En calculant $P_n'(0)$ qui est un certain coefficient de P_n, montrer que :

$$P_n(X) = X \prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{x_j^2}\right).$$

Q 19. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction sinus.

III.B – Dans cette sous-partie, on fixe un réel x et on considère la suite de fonctions $(v_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ v_k : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} x\displaystyle\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{\left(\tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor+1}\right)(2\lfloor t\rfloor+1)\right)^2}\right) & \text{si } t \geqslant k \\ P_{\lfloor t\rfloor}(x) & \text{si } t < k. \end{cases} \end{cases}$$

Q 20. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$,

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| \leqslant \frac{x^2}{k^2\pi^2}|v_{k-1}(t)|.$$

Q 21. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}^\star$,

$$|v_k(t)| \leqslant |x| \exp\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$

Q 22. En déduire que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 2}(v_k - v_{k-1})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Q 23. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\lim\limits_{t\to+\infty} v_k(t)$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{k\to+\infty} v_k(t)$.

Q 24. En déduire que :

$$\sin(x) = x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$

III.C –

Q 25. Montrer que, pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$,

$$\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2x}{(j\pi)^2 - x^2}.$$

Q 26. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On pourra dans un premier temps déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2\sin(x)}$.