Programme de la colle 2

Semaine du lundi 22 au vendredi 26 septembre 2025

Liste des questions de cours :

- Définition d'une somme directe de deux ou plus généralement k sous-espaces vectoriels
- Caractérisations d'une somme directe (dont le cas de la dimension finie)
- Définition de deux ou plus généralement k sous-espaces vectoriels supplémentaires
- Caractérisations de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires (dont le cas de la dimension finie)
- Base adaptée à une décomposition de E en somme directe
- Définition du noyau et de l'image d'une application linéaire
- Caractérisations de l'injectivité, de la surjectivité d'une application linéaire à l'aide du noyau et de l'image
- Définition et propriétés des projections + dessin
- Définition et propriétés des symétries + dessin
- Théorème du rang
- Caractérisation des hyperplans
- Produit de deux matrices
- Formule du changement de base pour un vecteur
- Formule du changement de base pour un endomorphisme

Chapitre 1a : Espaces vectoriels - révisions et compléments

- **Rappels** : espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, sous-espaces vectoriels, stabilité par intersection, sous-espaces vectoriels engendrés par une famille
- **Rappels** : familles génératrices, familles libres, bases, coordonnées dans une base (notation matricielle).
- **Rappels** : somme de deux sous-espaces vectoriels, somme directe et caractérisation, sous-espaces vectoriels supplémentaires et caractérisation,
- **Rappels** : espaces vectoriels de dimension finie, dimension d'un espace vectoriel, lien avec les familles génératrices, libres et bases, formule de Grassmann, existence d'un supplémentaire, CNS de supplémentarité
- **Rappels** : rang d'une famille de vecteurs, caractérisation des familles à l'aide du rang
- **Compléments** : produits finis d'espaces vectoriels $E_1 \times \cdots \times E_n$, dimension du produit
- **Compléments** : somme de k sous-espaces vectoriels $F_1 + \cdots + F_k$, somme directe $F_1 \oplus \cdots \oplus F_k$, caractérisation d'une somme directe (unique décomposition du vecteur nul), décomposition d'un espace vectoriel en somme directe, cas de la partition d'une base, base adaptée à un sous-espace vectoriel, base adaptée à une somme directe, dimension d'une somme.

Chapitre 1b : Applications linéaires - révisions

- **Rappels** : applications linéaires, endomorphismes, opérations sur les applications linéaires, isomorphismes, automorphismes, noyau, image, caractérisation des applications linéaires injectives, surjectives
- **Rappels** - endomorphismes remarquables : homothéties, projections, projecteurs (ce sont les projections sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à$\mathrm{Ker}(p)$, propriétés, symétries, lien avec les projections. *Savoir faire un dessin !*
- **Rappels** - cas de la dimension finie : l'image par f d'une base de E est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$, définition d'une unique application linéaire par l'image d'une base, caractérisation de l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité par l'image d'une base, espaces vectoriels isomorphes, définition d'une application linéaire sur des sous-espaces supplémentaires, rang d'une application linéaire, théorème du rang, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité pour $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\dim(E) = \dim(F)$
- **Rappels** : formes linéaires, hyperplans, caractérisation des hyperplans comme noyau d'une forme linéaire **non nulle**

Chapitre 2a : Calcul matriciel - révisions et compléments

— **Rappels** : l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, produit de matrices, transposée d'une matrice, matrices symétriques et antisymétriques, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

— **Rappels** : écriture matricielle d'un système linéaire, rang d'une matrice, lien avec le rang d'un système, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top)$

— Puissances d'une matrice carrée, formule du binôme de Newton, trace, propriétés de la trace, matrices carrées inversibles, propriétés, caractérisation de l'inversibilité, recherche de l'inverse à l'aide d'un système

— Matrices définies par blocs : définition, opérations sur la matrices définies par blocs (attention à la compatibilité des tailles).

Chapitre 2b : Applications linéaires et matrices - révisions et compléments

— **Rappels** : matrice d'une application linéaire, d'un endomorphisme, application linéaire ou endomorphisme canoniquement associée à une matrice, caractérisation matricielle de l'image d'un vecteur : $y = f(x) \Leftrightarrow Y = AX$, utilisation de $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$ pour déterminer $\text{Ker}(f)$ et $Im(f)$. Lien entre le rang d'une matrice et le rang d'une application linéaire, opérations sur les matrices.

— Matrice de passage, inversibilité et inverse, relation de Chasles, formule de changement de base pour un vecteur, formule de changement de base pour une application linéaire (peu utilisé en PC), formule de changement de base pour un endomorphisme.

— Matrices semblables, deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme, deux matrices semblables ont même rang, même trace, définition de la trace d'un endomorphisme, cas de la trace d'un projecteur, d'une symétrie.