Programme de la colle 5

Semaine du lundi 13 au vendredi 17 octobre 2025

Liste des questions de cours :

- Valeur d'un déterminant de Vandermonde
- Existence et unicité dans $\mathbb{R}_n[X]$ d'un polynôme interpolateur de Lagrange associés à $(a_0, \dots, a_n)$ deux à deux distincts et $(b_0, \dots, b_n)$.
- Démonstration : si u et v sont des endomorphismes qui commutent, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v.
- Caractérisation matricielle dans une base adaptée de F sous-espace stable de u
- Théorème sur les sommes de Riemann
- Intégration par parties
- Changement de variables
- Définition d'une fonction continue par morceaux
- Définition de la convergence d'un intégrale généralisée sur $[a, b[$, $]a, b]$
- Convergence des intégrales généralisées de référence (avec démonstration)

Le tout début des intégrales généralisées. On pourra donner des exemples simples.

Chapitre 4a : Déterminant - Interpolation de Lagrange

- Rappels de PCSI sur les déterminants : déterminant d'une matrice, d'un endomorphisme, propriétés. Calcul par développement suivant une ligne ou une colonne, cas des matrices triangulaires par blocs (avec blocs diagonaux carrés).
- Déterminant de Vandermonde, Polynômes de Lagrange associés aux points $(a_0, \dots, a_n)$ deux à deux distincts, bases de polynômes de Lagrange, polynôme interpolateur de Lagrange (exitence et unicité dans $\mathbb{R}_n[X]$), lien avec les matrices de Vandermonde.

Chapitre 4b : Polynômes d'endomorphismes et de matrices - Sous-espaces stables

- Polynômes d'endomorphismes et de matrices, propriétés, polynômes annulateurs, existence d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice.
- Applications des polynômes annulateurs : justification de l'inversibilité d'une matrice, et de la bijectivité d'un endomorphisme, détermination de l'inverse, calcul des puissances d'une matrice.
- Sous-espaces stables, notion d'endomorphisme induit, $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u, stabilité d'un vect. Si u et v sont des endomorphismes qui commutent, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v. Caractérisation matricielle dans une base adaptée de F sous-espace stable de u, extension à une décomposition de E comme somme directe de sous-espaces stables.

Chapitre 5a : Intégration sur un segment

- Rappels de PCSI : notion de primitive, théorème fondamental de l'analyse, sommes de Riemann (méthode des rectangles), intégration par parties, changement de variables, inégalité de Taylor-Lagrange.
- Fonctions continues par morceaux sur un segment : définition, toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée, $\mathscr{CM}([a, b], \mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{K})$, définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, propriétés (linéarité, Chasles, positivité et croissance, inégalité triangulaire).
- Définition des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I, $\mathscr{CM}(I, \mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, pour $f \in \mathscr{CM}([a, b], \mathbb{K})$ et $a \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est continue.

Chapitre 5b : Intégration sur un intervalle quelconque

— Convergence / divergence de l'intégrale généralisée d'une fonction f continue par morceaux sur $[a, b[$ (*resp.* sur $]a, b]$), caractère local de la nature d'une intégrale, compatibilité des définitions d'intégrales pour une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$; il n'y a pas de lien entre convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\lim_{+\infty} f = 0$,

— Intégrales de référence : $t \mapsto e^{-\alpha t}$, $t \mapsto \ln(t)$ et Riemann y compris la généralisation à d'autres bornes que 0.

— Cas particulier des intégrales faussement généralisées.

— Intégrales généralisées sur un intervalle ouvert non vide.