Programme de la colle 9

Semaine du lundi 24 au vendredi 28 novembre 2025

Liste des questions de cours :

- Définition de (f_n) converge simplement vers f sur I
- Définition de (f_n) converge uniformément vers f sur I
- Théorème de continuité de la limite f sur I d'une suite de fonctions (f_n) (avec démonstration pour le groupe $*$)
- Théorème d'intégration sur $[a,b]$ de la limite f d'une suite de fonctions (f_n) (avec démonstration pour le groupe $*$)
- Théorème de dérivation de la limite f d'une suite de fonctions (f_n)
- Théorème de dérivation (classe $\mathcal{C}^p$) de la limite f d'une suite de fonctions (f_n)
- Théorème de convergence dominée
- Définition de $\sum u_n$ converge simplement sur I
- Définition de $\sum u_n$ converge uniformément sur I
- Définition de $\sum u_n$ converge normalement sur I
- Théorème de continuité de la somme S sur I d'une série de fonctions $\sum u_n$
- Théorème de la double limite d'une série de fonctions $\sum u_n$
- Théorème d'intégration terme à terme sur $[a,b]$ d'une suite de fonctions $\sum u_n$
- Théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions $\sum u_n$
- Théorème de dérivation (classe $\mathcal{C}^p$) d'une série de fonctions $\sum u_n$
- Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.

Chapitre 6a : Suites de fonctions

- Différentes convergences d'une suite de fonctions :
  Convergence simple, convergence uniforme, notation $\|f\|_{\infty,I}$ pour f bornée sur I, lien avec la convergence uniforme.
  La convergence uniforme sur I implique la convergence simple sur I, la réciproque est fausse.
  Pour montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur I, on peut majorer $|f_n(x)-f(x)|$ uniformément en x par α_n terme général d'une suite qui tend vers 0.
  Pour montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur I, on peut trouver une suite (x_n) telle que $(f_n(x_n)-f(x_n))$ ne tende pas vers 0.

- Propriétés de la fonction limite f :
  monotonie (CVS sur I),
  continuité (CVU sur I ou sur tout segment de I ou sur une famille adaptée de segments de I),
  intégration sur un segment,
  classe $\mathcal{C}^1$, classe $\mathcal{C}^p$.
  Ces résultats permettent dans certains cas de montrer que la convergence n'est pas uniforme sur I.
- Théorème de convergence dominée.

Chapitre 6b : Séries de fonctions

- Différentes convergences d'une série de fonctions :
  Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale. La convergence uniforme sur I implique la convergence simple sur I, la réciproque est fausse. La convergence normale sur I implique la convergence uniforme sur I, la réciproque est fausse. La convergence normale sur I implique la convergence absolue de la série $\sum u_n(x)$ pour tout $x \in I$.

— Propriétés de la somme S d'une série de fonctions $\sum u_n$:
monotonie (CVS sur I),
continuité (CVU sur I ou sur tout segment de I ou sur une famille adaptée de segments de I),
théorème de la double limite,
théorème d'intégration terme à terme sur un segment $[a, b]$,
théorème de dérivation terme à terme (classe $\mathcal{C}^1$, classe $\mathcal{C}^p$).
Ces résultats permettent dans certains cas de montrer que la convergence n'est pas uniforme sur I.

— Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque.