Programme de la colle 16

Semaine du lundi 26 au vendredi 30 janvier 2026

Liste des questions de cours :

- Définition d'une norme et d'un espace vectoriel normé.
- Inégalités triangulaires.
- Définition d'un produit scalaire et d'un espace préhilbertien réel.
- Définition de la norme euclidienne associée à un produit scalaire. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Définition de la distance associée à une norme et propriétés.
- Définition de partie bornée, application bornée, suite bornée.
- Définition de $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$.
- Définition de N_1 et N_2 normes équivalentes sur E.
- Définition d'une partie convexe de E. Toute boule est convexe (démonstration groupe $*$).
- Définition d'un point intérieur à une partie A, de l'intérieur d'une partie A, d'un ouvert de E. Exemples
- Définition d'un point adhérent à une partie A, de l'adhérence d'une partie A, d'un fermé de E. Exemples.
- Caractérisation séquentielle des fermés.
- Définition d'une partie de E dense dans E.
- Définition de la limite en un point. Caractérisation séquentielle de la limite en un point.
- Définition de la continuité en un point. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.
- Définition d'une fonction lipschitzienne + démonstration de la continuité (groupe $*$). Exemples
- Théorème des bornes atteintes.
- Pour $u \in \mathscr{L}(E, f)$ où E est de dimension finie, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$ (démonstration groupe $*$).

Chapitre 9a : Espaces vectoriels normés

- Normes sur un espace vectoriel : définition, inégalités triangulaires,
  cas des espaces préhilbertiens réels : norme euclidienne associée à un produit scalaire,
  exemples d'espaces vectoriels normés : $\mathbb{K}^n$, E de dimension n, $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
  distance associée à une norme : définition et propriétés,
  parties bornées, applications et suites bornées, norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{B}(I,E)$ des applications bornées de I dans E, lien avec la convergence uniforme des suites et séries de fonctions.

- Suites dans un e.v.n : convergence d'une suite, propriétés (unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, opérations sur les suites convergentes), suites extraites.

- Comparaison des normes : normes équivalentes, conservation du caractère borné d'une partie, de la convergence d'une suite, en dimension finie les normes sont équivalentes, suites coordonnées d'une suite à valeurs dans un e.v.n de dimension finie muni d'une base, caractérisation de la convergence par la convergence des suites coordonnées.

Chapitre 9b : Topologie et applications continues

- Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie :
  Boules ouvertes, fermées, sphères.
  Parties convexes, les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, les boules sont convexes.
  Point intérieur à une partie, intérieur d'une partie, ouverts de E, stabilité par réunion quelconque et intersection finie.
  Point adhérent à une partie, adhérence d'une partie, fermés de E, stabilité par réunion finie et intersection quelconque, caractérisation séquentielle d'un point adhérent, caractérisation séquentielle des fermés.
  Préservation du caractère ouvert / fermé pour des normes équivalentes.
  Partie de E dense dans E.

— Limite et continuité d'une application en un point : limite en un point, caractère local, caractérisation séquentielle, opérations sur les limites, continuité en un point, caractérisation séquentielle.

— Applications continues :
Continuité sur une partie, opération sur les applications continues.
Fonctions lipschitziennes : définition, exemples (les formes linéaires coordonnées, toute application $x \mapsto d(x, a)$, en particulier $x \mapsto \|x\|$), toute fonction lipschizienne est continue, les applications linéaires telles que $\|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$ sont k-lipschitziennes donc continues.
Lien avec la topologie : images réciproques d'ouverts/fermés par une application continue.

— Cas de la dimension finie :
Pour $f : A \to F$ avec F de dimension finie : utilisation des applications coordonnées dans une base de F, caractérisation de la limite de f à l'aide des limites des applications coordonnées.
Théorème des bornes atteintes : $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ continue, E evn de dimension finie et A une partie fermée bornée et non vide.
Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales : le déterminant, la trace, $(A, B) \mapsto AB$, $M \mapsto M^k$, ...