Programme de la colle 17

Semaine du lundi 2 au vendredi 6 février 2026

Liste des questions de cours :

- Définition d'une partie convexe de E. Toute boule est convexe (démonstration groupe $*$).
- Définition d'un point intérieur à une partie A, de l'intérieur d'une partie A, d'un ouvert de E. Exemples
- Définition d'un point adhérent à une partie A, de l'adhérence d'une partie A, d'un fermé de E. Exemples.
- Caractérisation séquentielle des fermés.
- Définition d'une partie de E dense dans E.
- Définition de la limite en un point. Caractérisation séquentielle de la limite en un point.
- Définition de la continuité en un point. Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.
- Définition d'une fonction lipschitzienne + démonstration de la continuité (groupe $*$). Exemples
- Théorème des bornes atteintes.
- Pour $u \in \mathscr{L}(E,f)$ où E est de dimension finie, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$ (démonstration groupe $*$).
- Lemme d'Abel.
- Définition du rayon de convergence d'une série entière.
- Convergence de $\sum a_n z^n$ selon que $|z| < R$ ou $|z| > R$.
- Théorème de d'Alembert pour les séries entières.
- Rayon de convergence de la somme de deux séries entières.
- Rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières.
- Convergence normale (sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence).
- Continuité de la somme (série entière de la variable réelle).
- Primitivation terme à terme (série entière de la variable réelle).
- Classe $\mathcal{C}^1$ de la somme et dérivation terme à terme (série entière de la variable réelle).
- Classe $\mathcal{C}^\infty$ de la somme et dérivation terme à terme (série entière de la variable réelle).
- DSE usuels.

Attention : ne poser que des exercices simples d'application directe du cours pour les séries entières.

Chapitre 9a : Espaces vectoriels normés

- Normes sur un espace vectoriel : définition, inégalités triangulaires,
  cas des espaces préhilbertiens réels : norme euclidienne associée à un produit scalaire,
  exemples d'espaces vectoriels normés : $\mathbb{K}^n$, E de dimension n, $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,
  distance associée à une norme : définition et propriétés,
  parties bornées, applications et suites bornées, norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$ sur l'espace vectoriel $\mathscr{B}(I,E)$ des applications bornées de I dans E, lien avec la convergence uniforme des suites et séries de fonctions.

- Suites dans un e.v.n : convergence d'une suite, propriétés (unicité de la limite, toute suite convergente est bornée, opérations sur les suites convergentes), suites extraites.

- Comparaison des normes : normes équivalentes, conservation du caractère borné d'une partie, de la convergence d'une suite, en dimension finie les normes sont équivalentes, suites coordonnées d'une suite à valeurs dans un e.v.n de dimension finie muni d'une base, caractérisation de la convergence par la convergence des suites coordonnées.

Chapitre 9b : Topologie et applications continues

— Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie :
Boules ouvertes, fermées, sphères.
Parties convexes, les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, les boules sont convexes.
Point intérieur à une partie, intérieur d'une partie, ouverts de E, stabilité par réunion quelconque et intersection finie.
Point adhérent à une partie, adhérence d'une partie, fermés de E, stabilité par réunion finie et intersection quelconque, caractérisation séquentielle d'un point adhérent, caractérisation séquentielle des fermés.
Préservation du caractère ouvert / fermé pour des normes équivalentes.
Partie de E dense dans E.

— Limite et continuité d'une application en un point : limite en un point, caractère local, caractérisation séquentielle, opérations sur les limites, continuité en un point, caractérisation séquentielle.

— Applications continues :
Continuité sur une partie, opération sur les applications continues.
Fonctions lipschitziennes : définition, exemples (les formes linéaires coordonnées, toute application $x \mapsto d(x,a)$, en particulier $x \mapsto \|x\|$), toute fonction lipschizienne est continue, les applications linéaires telles que $\|u(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E$ sont k-lipschitziennes donc continues.
Lien avec la topologie : images réciproques d'ouverts/fermés par une application continue.

— Cas de la dimension finie :
Pour $f : A \to F$ avec F de dimension finie : utilisation des applications coordonnées dans une base de F, caractérisation de la limite de f à l'aide des limites des applications coordonnées.
Théorème des bornes atteintes : $f : A \subset E \to \mathbb{R}$ continue, E evn de dimension finie et A une partie fermée bornée et non vide.
Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales : le déterminant, la trace, $(A,B) \mapsto AB$, $M \mapsto M^k$, ...

Chapitre 10 : Séries entières

— Séries entières et rayon de convergence :
Définition, lemme d'Abel, rayon de convergence, comportement de la série selon que $|z| < R$ ou $|z| > R$, disque ouvert de convergence (variable complexe), intervalle ouvert de convergence (variable réelle).
Relations de comparaison ($|a_n| \leqslant |b_n|$, $a_n = O(b_n)$, $a_n = o(b_n)$, $a_n \sim b_n$, $a_n = nb_n$) et rayon de convergence,
Utilisation de la règle de d'Alembert : pour les séries entières tq a_n non nul à partir d'un certain rang, ou pour les séries numériques lorsque la série entière est lacunaire (préciser $|z| \neq 0$).
Opérations sur les séries entières : somme, cas des séries entières paires et impaires, produit de Cauchy de deux séries entières.

— Propriétés de la somme d'une série entière de la variable réelle :
Convergence normale sur tout segment inclus dans l'intervalle de convergence.
Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.
Primitivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence.
Classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^\infty$, Dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

— Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction de la variable réelle :
Fonction développable en série entière (DSE) en 0 ou sur $]-r,r[$, opérations sur les fonctions DSE en 0 : combinaisons linéaires, produit, primitives et dérivées successives.
Développement en série entière et série de Taylor : série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sir $]-r,r[$; si f est DSE alors f est de $\mathcal{C}^\infty$ et sa série entière coïncide avec sa série de Taylor, en revanche si f est de $\mathcal{C}^\infty$, rien n'assure la convergence de sa série de Taylor, ni le fait que sa somme soit égale à f, Formule de Taylor avec reste intégral : l'étude du reste d'ordre n permet de montrer que la série de Taylor converge et que sa somme est f.
Unicité du développement en série entière, caractérisation des fonctions DSE paires, impaires.
DSE classiques : $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$, $x \mapsto \dfrac{2}{(1-x)^3}$, $x \mapsto \ln(1+x)$, arctan, exp, ch, sh, cos, sin, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).