# Programme de la colle 21

Semaine du lundi 23 au vendredi 27 mars 2026

**Liste des questions de cours :**

- Théorème de Pythagore.
- Caractérisation de l'orthogonal d'un Vect.
- Définition de famille orthogonale, orthonormée et caractérisation matricielle.
- Coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n d'un espace euclidien.
- Expression du produit scalaire et de la norme dans une b.o.n.
- Définition et caractérisation utile de la projection sur $F$ sous-espace de $E$ de dimension finie (+ dessin !).
- Dans un espace euclidien : lien entre $p_F$ et $p_{F^\perp}$ (+ dessin).
- Écriture du projeté orthogonal dans une b.o.n + démo (groupe $*$).
- Distance à un sous-espace vectoriel, théorème de projection (+ dessin).
- Définition d'une isométrie vectorielle.
- Caractérisations des isométries vectorielles.
- Définition d'une symétrie orthogonale et lien avec la projection orthogonale (+ dessin).
- Définition et caractérisations des matrices orthogonales.
- Déterminant et spectre d'une matrice orthogonale + démo (groupe $*$).
- Définition du groupe spécial orthogonal et propriétés.
- Description de $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$.
- Caractérisation des isométries directes dans une b.o.n directe.
- Caractérisation des isométries directes dans une b.o.n.
- Définition d'endomorphisme autoadjoint.
- Caractérisation des projections et symétries orthogonales.
- Caractérisation matricielle des endomorphismes autoadjoints.
- Les sous-espaces propres de $f \in S(E)$ sont deux à deux orthogonaux + démo (groupe $*$).
- Théorème spectral : version endomorphisme autoadjoint ou matrice symétrique réelle.
- Définition et caractérisation d'un endomorphismes symétrique positif (*resp.* défini positif) + démo (groupe $*$).
- Définition et caractérisation d'une matrice symétrique positive (*resp.* définie positive) + démo (groupe $*$).

## **Chapitre 13a** : Révisions sur les espaces préhilbertiens réels

Soit $E$ un espace préhilbertien.

- Orthogonalité : définition, théorème de Pythagore,
  Orthogonal d'une partie $A$ de $E$ : $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel $E$, si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$, caractérisation de l'orthogonal d'un Vect.
- Familles orthogonales, orthonormées (ou orthonormales), caractérisation matricielle : si $A = \mathrm{Mat}(x_1, \dots, x_p)$, alors $A^\top A = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
  Toute famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre, généralisation du théorème de Pythagore.
  Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
- Base orthonormée d'un espace euclidien, existence, théorème de la base orthonormée incomplète, coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée, calcul du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.

- Définition de $F \perp G$, tout sous-espace vectoriel $F$ de dimension finie est tel que $E = F \oplus F^\perp$, conséquence sur les dimensions dans le cas $E$ euclidien et conséquence : $(F^\perp)^\perp = F$.
- Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, dessin (impératif), théorème de Pythagore, lien entre $p_F$ et $p_{F^\perp}$ dans le cas $E$ euclidien. Caractérisation utile : $y = p_F(x) \iff y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.
  Écriture du projeté orthogonal dnas une base orthonormée, ou simplement orthogonale. Cas de la projection sur une droite, sur un plan.
  Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie : définition et théorème de projection.

# **Chapitre 13b** : Endomorphismes d'un espace euclidien

— Isométries vectorielles : définition (conservation de la norme), notation $f \in O(E)$, et caractérisations : conservation du produit scalaire, l'image d'une b.o.n est une b.o.n. Toute isométrie est un automorphisme.
Étude des symétries orthogonales : définition, lien avec la projection orthogonale, toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle (ce qui n'est pas le cas d'une projection orthogonale en général).
Propriétés des isométries vectorielles : $\mathrm{id}_E$ est une isométrie, la composée de deux isométries est une isométrie, la réciproque d'une isométrie est une isométrie. Si $f \in O(E)$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1, 1\}$, si $F$ est stable par $f$, alors $f^{\perp}$ l'est aussi.

— Matrices orthogonales : définition, notation $A \in O_n(\mathbb{R})$, caractérisations. $f$ est une isométrie si, et seulement si, sa matrice dans une b.o.n est orthogonale.
Propriétés des matrices orthogonales : $I_n$ est orthogonale, le produit de deux matrices orthogonales est orthogonale, l'inverser (donc la transposée) d'une matrice orthogonale est orthogonale.
Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$ et $\det(A) = \pm 1$. Si $f \in O(E)$, alors $\det(f) = \pm 1$.
Groupe spécial orthogonal, stabilité par composition et passage à l'inverse.
Orientation d'un espace euclidien : deux bases ont la même orientation si la matrice de passage de l'une à l'autre est orthogonale directe.

— Isométries vectorielles du plan : description de $O_2(\mathbb{R})$ et $SO_2(\mathbb{R})$, matrices de rotation $R(\theta)$.
$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1)$, en particulier $R(\theta)$ est inversible d'inverse $R(-\theta)$.
Isométries directes du plan : la matrice est de la forme $R(\theta)$ quelle que soit la b.o.n directe choisie, rotation vectorielle, angle de la rotation, mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.
Isométrie indirectes du plan : réflexion par rapport à la droite des invariants $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.
Décomposition d'une rotation en composée de deux réflexion dont l'une des deux peut-être choisie arbitrairement.

— Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) : notation $f \in S(E)$. $S(E)$ est une sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. Caractérisation des projections et des symétries orthogonales, caractérisation matricielle des endomorphismes autoadjoints dans une b.o.n. Dimension de $S(E)$.

— Si $F$ est stable par $f \in S(E)$, alors $F^{\perp}$ l'est aussi. Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.
Théorème spectrale : pour un endomorphisme autoadjoint ou une matrice symétrique réelle.

— Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs, caractérisations en termes de spectre.
Matrices symétriques positives, définies positives, caractérisations en termes de spectre.