Devoir Maison 3 - corrigé de la partie Approfondissement

Exercice n° 1

1. Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \left(\text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)$.

   f est clairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et, par opérations, on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'(x) &= \frac{1}{1+\frac{1}{4x^4}} \times \frac{-1}{x^3} - \left(\frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} \times \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} \times \frac{1}{x^2} \right) \\
&= \frac{-4x}{4x^4+1} - \left(\frac{1}{(x+1)^2+x^2} - \frac{1}{x^2+(x-1)^2} \right) \\
&= \frac{-4x}{4x^4+1} - \left(\frac{1}{2x^2+1+2x} - \frac{1}{2x^2+1-2x} \right) \\
&= \frac{-4x}{4x^4+1} - \frac{-4x}{(2x^2+1-2x)(2x^2+1+2x)} \\
&= \frac{-4x}{4x^4+1} - \frac{-4x}{(2x^2+1)^2-4x^2} \\
&= \frac{-4x}{4x^4+1} - \frac{-4x}{4x^4+1} \\
&\boxed{= 0}
\end{aligned}$$

   On en déduit que la fonction f est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*} =]0;+\infty[$.
   Il suit que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = f(1) = \text{Arctan}(\frac{1}{2}) - \text{Arctan}(\frac{1}{2}) + \text{Arctan}(0) = 0$.

   Finalement, f est constante et nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$. Autrement dit,

$$\boxed{\forall x > 0,\ \text{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. On a, en vertu de la question précédente :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ \text{Arctan}\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{k}{k+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

   Il suit donc que :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{2k^2}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\text{Arctan}\left(\frac{k}{k+1}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{k-1}{k}\right) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{k}{k+1}\right) \ - \ \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{k-1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{k}{k+1}\right) \ - \ \sum_{i=0}^{n-1} \text{Arctan}\left(\frac{i}{i+1}\right) \qquad (\text{avec } i = k-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \text{Arctan}\left(\frac{k}{k+1}\right) \ + \ \text{Arctan}\left(\frac{n}{n+1}\right) \ - \ \text{Arctan}\left(\frac{0}{1}\right) \ - \ \sum_{i=1}^{n-1} \text{Arctan}\left(\frac{i}{i+1}\right) \\
&= \text{Arctan}\left(\frac{n}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \text{Arctan}\left(\frac{1}{2k^2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \text{Arctan}\left(\frac{n}{n+1}\right)$.

   Par opérations sur les limites, la limite cherchée est donc $\boxed{\frac{\pi}{4}}$.

Exercice n° 2

Procédons par analyse-synthèse.

Analyse : supposons que f soit une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie $(\star)$.
Fixons $y \in \mathbb{R}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$. Chaque membre de l'équation précédente est une fonction dérivable de x et, en dérivant, on a : $f'(x+y) = f'(x)$. Ceci étant vrai pour tout y, on en déduit que f' est une fonction constante, mettons $a \in \mathbb{R}$. Puisqu'on travaille sur un intervalle, il existe une constante $b \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Finalement, f est une fonction affine.

Synthèse : soit f une fonction affine, mettons $f(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. f est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, regardons si elle vérifie $(\star)$. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = a(x+y) + b = ax + ay + b$ et $f(x) + f(y) = ax + ay + 2b$. f vérifie donc $(\star)$ si, et seulement si, $b = 2b$, c'est-à-dire $b = 0$.

Conclusion : l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient $(\star)$ est l'ensemble des fonctions linéaires, c'est-à-dire de la forme $x \mapsto ax$ (avec $a \in \mathbb{R}$ fixé).