PCSI, Mathématiques - Corrigé du DM8

# Problème : calcul de l'intégrale de Dirichlet

### 1) Définition et existence de l'intégrale de Dirichlet

Soit $A \in [2\pi, +\infty[$.

a) On a $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ et donc $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 1$ donc $\boxed{\lim_{t\to 0} f(t) = 1}$.

On en déduit qu'$\boxed{\text{on peut prolonger } f \text{ en une fonction continue sur } \mathbb{R}^+ \text{ en posant } f(0) = 1}$.

b) $\boxed{\text{Pour tout } A \geq 2\pi \text{ on a } f \text{ qui est continue sur le segment } [0; A] \text{ et donc } \displaystyle\int_0^A f(t)\ \mathrm{d}t \text{ existe}}$.

c) À l'aide d'une intégration par parties avec les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ suivantes $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto 1 - \cos(t)$, on obtient $\boxed{\displaystyle\int_{2\pi}^A \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{1-\cos(A)}{A} + \int_{2\pi}^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t}$.

d) Pour tout $t > 0$ on a $\dfrac{1-\cos(t)}{t^2} \geqslant 0$, il suit que la fonction $\varphi : A \mapsto \displaystyle\int_{2\pi}^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t$ est croissante.

De plus, pour tout $A \in [2\pi, +\infty[$ on a $\varphi(A) = \displaystyle\int_{2\pi}^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t \leqslant \int_{2\pi}^A \frac{2}{t^2}\ \mathrm{d}t = \left[-2t^{-1}\right]_{2\pi}^A = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{A} \leqslant \frac{1}{\pi}$.

$\boxed{\varphi \text{ est croissante et majorée, d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie en } +\infty}$.

e) Pour tout $A \geq 2\pi$, on a grâce à la relation de Chalsles et aux questions précédentes :

$$\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t + \int_{2\pi}^A \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t}_{\text{constante}} + \underbrace{\frac{1-\cos(A)}{A}}_{\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\int_{2\pi}^A \frac{1-\cos(t)}{t^2}\ \mathrm{d}t}_{\varphi(A)}$$

On en déduit que $\boxed{\displaystyle\int_0^A \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t \text{ possède une limite finie } I \text{ lorsque le réel } A \text{ tend vers } +\infty}$.

### 2) Des intégrales qui seront utiles

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit, pour $x \in ]0; \frac{\pi}{2}]$ les fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)x)}{x}$ et $g_n : x \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$.

a) $f_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{(2n+1)x}{x} = 2n+1$ donc $\boxed{f_n \text{ se prolonge par continuité en 0 en posant } f_n(0) = 2n+1}$.

De même, $g_n \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{(2n+1)x}{x} = 2n+1$ donc $\boxed{g_n \text{ se prolonge par continuité en 0 en posant } g_n(0) = 2n+1}$.

$f_n$ et $g_n$ étant continues sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ (comme quotients de fonctions continues), ainsi prolongées, elles sont continues sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

b) À l'aide du changement de variable $t = (2n+1)x$, on a :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\ \mathrm{d}x = \boxed{\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t}.$$

c) On a $\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \sin(a) - \sin(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})}$ (angle moitié).

d) On a, pour tout entier naturel $n$ : $J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+3)x) - \sin((2n+1)x)}{\sin(x)}\mathrm{d}x$.

On utilise la formule rappelée à la question précédente et il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ J_{n+1} - J_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos((2n+2)x)}{\sin(x)}\mathrm{d}x = 2\left[\frac{\sin((2n+2)x)}{2n+2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Donc la suite $(J_n)_n$ est constante. D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = J_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}}$.

e) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{I_n - J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right) \sin((2n+1)x)\mathrm{d}x}$.

**3) Lemme de Lebesgue**

À l'aide d'une intégration par parties on obtient :

$$L_n = \int_a^b g(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \left[-g(x)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b g'(x)\cos(nx)\mathrm{d}x$$

La fonction $x \mapsto g'(x)$ est continue et donc bornée sur le segment $[a,b]$, mettons $\forall x \in [a;b],\ |g'(x)| \leq M$ avec $M$ un réel positif. On a alors, par croissance de l'intégrale sur le segment $[a;b]$ :

$$\forall x \in [a;b], \forall n \in \mathbb{N},\ -M \leq g'(x)\cos(nx) \leq M \Longrightarrow -M(b-a) \leq \int_a^b g'(x)\cos(nx)\ \mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

Il suit, par le théorème des gendarmes, que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_a^b g'(x)\cos(nx)\mathrm{d}x = 0$.

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (L_n) \text{ converge vers } 0}$.

**4) Une fonction annexe**

a) Par quotient et combinaison linéaire, $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

De plus, $\varphi(x) = \dfrac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\frac{-x^3}{6}}{x^2} = \dfrac{-x}{6}$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x) = 0 = \varphi(0)$ et $\boxed{\varphi \text{ est bien continue sur } [0;\tfrac{\pi}{2}]}$.

b) Par opérations, $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;\frac{\pi}{2}]$. Pour avoir la classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$, il faut qu'on montre que $\varphi$ est dérivable en 0 et que sa dérivée est continue en 0. On peut faire cela en deux étapes (pour montrer que $\varphi$ est dérivable en 0 il suffit de calculer un développement limité à l'ordre 1 de $\varphi$ en 0) ou directement à l'aide du théorème de la limite de la dérivée :

$$\forall\ x \in ]0, \frac{\pi}{2}]\ , \varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) + x^2\cos(x)}{x^2\sin^2(x)}$$

On a : $-\sin^2(x) + x^2\cos(x) \underset{x\to 0}{=} -x^2 + \frac{2}{3!}x^4 + x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{6}x^4 + o\left(x^4\right)$. Donc $\varphi'(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{6}$.

Le théorème de la limite de la dérivée s'applique : $\varphi$ est dérivable en 0 et $\phi'(0) = -\dfrac{1}{6} = \lim\limits_{x\to 0}\varphi'(x)$.

Finalement, $\boxed{\varphi' \text{ est continue en 0 et } \varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$.

**5) Conclusion**

D'après la question 2b, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = I$ ; on a aussi vu (2d) que $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = I - \dfrac{\pi}{2}$.

On a également vu (2e) que $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n - J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)\sin(nx)\ \mathrm{d}x$ avec $\varphi$ qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (d'après la question 4).

Le lemme de Lebesgue (question 3) s'applique et il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = 0$.

Par unicité de la limite, $I - \dfrac{\pi}{2} = 0 \Longleftrightarrow \boxed{I = \dfrac{\pi}{2}}$.