PCSI, Mathématiques - Corrigé du DM9

1. a) Les éléments de F sont les polynômes de la forme $\alpha X^4 + (\alpha+\beta)X + \beta = \alpha(X^4+X) + \beta(X+1)$ donc $F = \text{Vect}(X^4+X, X+1))$ et F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

   b) $(X^4+X, X+1)$ est une famille génératrice de F.
   C'est une famille échelonnée et donc libre, $\boxed{\text{c'est donc une base de } F \text{ et } \dim(F) = 2}$.

2. a) — Le polynôme nul est dans G (car $0' = 0$).
   — Soit P et Q deux polynômes de G, λ et μ deux réels. Montrons que $\lambda P + \mu Q$ est dans G.
   On a $P \in G \Leftrightarrow P'(1) = 0$ et $Q \in G \Leftrightarrow Q'(1) = 0$ donc $(\lambda P + \mu Q)'(1) = \lambda P'(1) + \mu Q'(1) = 0$ et $\lambda P + \mu Q \in G$.

   $\boxed{G \text{ est non-vide et stable par combinaisons linéaires, c'est donc un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_4[X]}$.

   b) G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ dont la dimension est 5 donc $\dim(G) \leq 5$ et le cas d'égalité correspond à $G = \mathbb{R}_4[X]$.
   Or, $X \notin G$ donc $\boxed{G \neq \mathbb{R}_4[X] \text{ et donc } \dim(G) \leq 4.}$

   c) Il est clair que la famille $(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ est une famille de polynômes de G, comme c'est une famille échelonnée elle est libre.

   d) G contient $\text{Vect}(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ qui est de dimension 4 puisque la famille $(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ est libre. On a donc $\dim(G) \geq 4$. On a vu que $\dim(G) \leq 4$, il suit $\boxed{\dim(G) = 4}$.

3. a) On a :
$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}(X^4+X \ ; \ X+1) + \text{Vect}(1 \ ; \ (X-1)^2 \ ; \ (X-1)^3 \ ; \ (X-1)^4)) \\ &= \text{Vect}(X^4+X \ ; \ X+1 \ ; \ 1 \ ; \ (X-1)^2 \ ; \ (X-1)^3 \ ; \ (X-1)^4) \end{aligned}$$

   b) La famille $X^4+X \ ; \ X+1 \ ; \ 1 \ ; \ (X-1)^2 \ ; \ (X-1)^3)$ est une famille libre (car échelonnée) de 5 polynômes de $F+G$ on a donc $\dim(F+G) \geq 5$. Comme $F+G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ qui est de dimension 5, on en déduit que $\boxed{F + G = \mathbb{R}_4[X]}$.

4. a) La formule de Grassman donne $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$; d'après les questions précédentes, on a $\boxed{\dim(F \cap G) = 1}$

   b) $F \cap G$ est une droite vectorielle, il suffit de trouver un polynôme non nul de $F \cap G$ pour en avoir une base. $P = 1X^4 + (1 + (-5))X + (-5) = X^4 - 4X - 5$ convient.